MATHESIS

Directeur: Hourya BENIS SINACEUR

Paolo MANCOSU

Sergio GALVAN

Richard ZACH

introduction à la théorie de la démonstration

élimination des coupures, normalisation et preuves de cohérence

traduction de

Yacine AGGOUNE, David APPADOURAI et Agathe ROLLAND

révisée par

David WASZEK

PARIS

LIBRAIRIE PHILOSOPHIQUE J. VRIN

6, Place de la Sorbonne, V^e

2022

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

À PROPOS DE CE LIVRE

Ce livre est né du désir de permettre aux étudiants, et en particulier aux étudiants de philosophie qui n'ont qu'une formation minimale en mathématiques et en logique, de saisir la signification des résultats les plus importants de la théorie classique de la démonstration. La plupart des manuels de théorie de la démonstration partent d'un niveau assez élevé. Les plus accessibles d'entre eux ne couvrent que la théorie structurelle de la démonstration, et ceux qui couvrent également la théorie ordinale de la démonstration exigent une solide formation mathématique. Malheureusement, il n'existe pas de bonne introduction élémentaire à la théorie de la démonstration qui traite les deux sujets. Le but de ce livre est de combler cette lacune.

Nous présupposons, de la part de nos lecteurs, une familiarité avec le calcul des propositions et le calcul des prédicats, tels qu'ils sont abordés dans la plupart des cours d'introduction à la logique formelle dispensés dans les départements de philosophie. Nous ne présupposons cependant de familiarité avec aucun système déductif en particulier. De fait, les premiers chapitres sont, pour l'essentiel, des introductions à trois systèmes : la dérivation axiomatique, la déduction naturelle et le calcul des séquents. Nous ne présupposons pas non plus de familiarité avec la métathéorie de la logique, ni même avec le principe le plus élémentaire servant à raisonner sur nos systèmes, à savoir le principe d'induction sur les entiers naturels ($\mathbb{N}$). Nous familiarisons nos lecteurs de manière progressive avec le fonctionnement des démonstrations par induction, en commençant par l'induction simple sur $\mathbb{N}$ [1], puis en passant à l'induction double et enfin à l'induction sur de bons ordres plus complexes, comme ε_0.

Ceux qui souhaitent plonger sans plus attendre dans la théorie structurelle de la démonstration peuvent laisser de côté le chapitre II, qui porte sur les dérivations axiomatiques. Il faut cependant garder à l'esprit que c'est là qu'est présenté le principe d'induction sur $\mathbb{N}$ (à la section II.7). De plus, ce chapitre explique les distinctions cruciales entre les systèmes de logique minimale, intuitionniste et classique. Comme il est usuel en théorie de la démonstration, notre syntaxe traite les variables libres et liées comme des catégories syntaxiques distinctes ; c'est encore une fois dans le chapitre II que nous présentons cette approche et expliquons en quoi elle diffère de la démarche habituelle, qui n'emploie qu'un seul type de variable mais fait une distinction entre *occurrences* libres et liées de variables (voir la section II.13).

L'un des objectifs principaux que nous nous sommes fixés est de fournir une introduction à la théorie de la démonstration qui puisse servir de complément à la lecture des articles originaux de Gerhard Gentzen. C'est pourquoi, bien que nous ne suivions pas aveuglément Gentzen, nous ne nous écartons jamais beaucoup de ses choix de systèmes et de son style de démonstration. Comme nous le verrons, cela détermine nos choix de systèmes dès notre traitement des calculs axiomatiques.

En ce qui concerne la théorie structurelle de la démonstration, nous abordons entre autres la traduction de Gödel-Gentzen de la logique et de l'arithmétique classique dans la logique et l'arithmétique intuitionniste ; la déduction naturelle et les théorèmes de normalisation (pour les systèmes **NJ** et **NK**) ; le calcul des séquents (y compris les théorèmes d'élimination des coupures et du séquent médian) ; ainsi que diverses applications de ces résultats. La seconde moitié du livre traite de la théorie ordinale de la démonstration, en particulier de la démonstration de Gentzen de la cohérence de l'arithmétique de Peano du premier ordre par induction ordinale jusqu'à ε_0. Nous développons à partir de zéro la théorie des notations ordinales ainsi que d'autres notions de base de la théorie ordinale ; nous ne présupposons aucune connaissance de la théorie des ensembles.

Afin de rendre le contenu accessible à des lecteurs sans connaissances

1. C'est-à-dire ce que l'on appelle usuellement le raisonnement par récurrence (voir p. 9-10), dont nous verrons qu'il existe deux variantes principales (induction par successeur et induction forte). (N. d. t.)

mathématiques avancées, nous procédons aux démonstrations de manière beaucoup plus détaillée qu'à l'ordinaire. Pour prendre un exemple, bien que nous suivions Prawitz 1965 dans notre démonstration de la propriété de la sous-formule pour la déduction naturelle (pour le système **NJ**), nous vérifions tous les détails omis par Prawitz. De même, pour démontrer le résultat de cohérence de Gentzen, nous démontrons toutes les propriétés requises concernant les notations ordinales et tous les lemmes nécessaires, et nous vérifions dans tous les détails que la procédure de réduction conduit à une diminution des notations ordinales. Nous traitons également de nombreux exemples pour illustrer les définitions et montrer sur des cas particuliers comment les démonstrations fonctionnent.

Nous nous écartons également des présentations usuelles sur certains points dans le but de nous dispenser de certains prérequis. Nous définissons par exemple les notations ordinales $< \varepsilon_0$ de manière purement combinatoire, sans présupposer de familiarité avec les ordinaux (quoique nous présentions également la définition des ordinaux en théorie des ensembles ainsi que son lien avec la définition combinatoire des notations ordinales). Cette approche a un avantage philosophique : nous soulignons d'emblée que les notations ordinales ne sont pas des ordinaux transfinis, et que le fait qu'elles soient bien ordonnées découle de principes combinatoires élémentaires sur l'ordre des suites. En d'autres termes, notre présentation des notations ordinales est quasiment finitaire.

Notre démonstration de la cohérence de **PA** présente également une particularité importante qui la distingue des présentations habituelles comme de la version originale de Gentzen. Au lieu de montrer qu'une démonstration putative du séquent vide peut être transformée en une démonstration sans induction ni coupure portant sur des formules complexes, nous montrons ce résultat pour les démonstrations de tout séquent ne contenant que des formules atomiques. Ce que l'on y gagne philosophiquement est que la preuve de cohérence prend d'emblée la forme d'un résultat de conservativité, à savoir que l'on peut éliminer l'induction et les CUTS complexes dans les démonstrations de faits arithmétiques élémentaires dans **PA**. De surcroît, dans la mesure où la procédure de réduction est, de ce fait, applicable à des démonstrations qui existent réellement (et non seulement à des démonstrations putatives de contradictions, qui s'avèrent en fait ne pas exister), cela nous permet d'illustrer le fonctionnement de la procédure sur des exemples. Cette manière de procéder a donc aussi un intérêt pédagogique.

Ce livre pourra intéresser les philosophes, les logiciens, les mathématiciens, les informaticiens et les linguistes. Le matériau que nous présentons permettra aux étudiants en philosophie d'acquérir les outils nécessaires pour aborder d'autres questions de philosophie des mathématiques, par exemple la question de savoir ce que l'on peut espérer du programme de Hilbert et de ses versions relativisées, ainsi que de philosophie de la logique et du langage, par exemple la signification des constantes logiques, la sémantique inspirée de la théorie de la démonstration (« *proof-theoretic semantics* »), le débat réalisme/antiréalisme, le programme de Dummett, l'harmonie, etc.

Pour en savoir plus

1. Des traductions anglaises des articles de Gentzen sont disponibles dans le volume suivant :

   Gentzen, G. 1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, sous la dir. de M. E. Szabo, Amsterdam, North-Holland.

   Certains articles ont également été traduits en français (voir Gentzen 1955 et Largeault 1992) ; les détails des traductions existantes sont donnés dans la bibliographie en fin de volume.
2. Pour un aperçu détaillé de l'histoire de la logique mathématique de Russell à Gentzen, voir :

   Mancosu, P. 2010, *The Adventure of Reason. Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900–1940*, Oxford et New York, Oxford University Press.

   Mancosu, P., R. Zach et C. Badesa 2009, « The development of mathematical logic from Russell to Tarski : 1900-1935 », in *The Development of Modern Logic*, sous la dir. de L. Haaparanta, New York et Oxford, Oxford University Press, p. 324-478, doi : `10.1093/acprof:oso/9780195137316.003.0029`, réimp. in Mancosu 2010, p. 5-119.

3. Pour le contexte philosophique de l'intuitionnisme et le programme de Hilbert :

   Iemhoff, R. 2020, « Intuitionism in the philosophy of mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, sous la dir. d'E. N. Zalta, automne 2020, `https://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/`.

LARGEAULT, J., éd. 1992, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris, Vrin.

MANCOSU, P., éd. 1998, *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, New York et Oxford, Oxford University Press.

ZACH, R. 2019, « Hilbert's program », in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, sous la dir. d'E. N. Zalta, automne 2019, https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/hilbert-program/.

4. Pour un aperçu de l'histoire de la théorie de la démonstration jusqu'à Gentzen :

HENDRICKS, V. F., S. A. Pedersen et K. F. Jørgensen, éd. 2000, *Proof Theory: History and Philosophical Significance*, Dordrecht, Springer, DOI : 10.1007/978-94-017-2796-9.

PLATO, J. VON 2018, « The development of proof theory », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, sous la dir. d'E. N. Zalta, https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/.

5. Sur la vie et la carrière de Gentzen :

MENZLER-TROTT, E. 2016, *Logic's Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen*, History of Mathematics, 33, American Mathematical Society.

6. Pour un aperçu plus technique des contributions de Gentzen à la logique :

PLATO, J. VON 2009, « Gentzen's logic », in *Logic from Russell to Church*, sous la dir. de D. M. Gabbay et J. Woods, Handbook of the History of Logic, 5, Amsterdam, North-Holland, p. 667-721, DOI : 10.1016/S1874-5857(09)70017-2.

7. Quelques aperçus introductifs à la théorie de la démonstration :

PRAWITZ, D. 1971, « Ideas and results in proof theory », in *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, sous la dir. de J. E. Fenstad, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 63, Amsterdam, North-Holland, p. 235-307, DOI : 10.1016/S0049-237X(08)70849-8.

RATHJEN, M. et W. Sieg 2020, « Proof theory », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, sous la dir. d'E. N. Zalta, automne 2020, https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/proof-theory/.

8. Quelques manuels plus avancés de théorie de la démonstration :

ARAI, T. 2020, *Ordinal Analysis with an Introduction to Proof Theory*, Logic in Asia : Studia Logica Library, Singapore, Springer, DOI : 10.1007/978-981-15-6459-8.

BIMBÓ, K. 2014, *Proof Theory: Sequent Calculi and Related Formalisms*, Boca Raton, CRC Press.

BUSS, S. R., éd. 1998, *Handbook of Proof Theory*, Amsterdam, Elsevier.

DILLER, J. 2019, *Functional Interpretations: From the Dialectica Interpretation to Functional Interpretations of Analysis and Set Theory*, World Scientific.

GIRARD, J.-Y. 1987, *Proof Theory and Logical Complexity*, Studies in Proof Theory, 1, Naples, Bibliopolis.

NEGRI, S. et J. von Plato 2001, *Structural Proof Theory*, Cambridge, Cambridge University Press.

POHLERS, W. 2009, *Proof Theory: The First Step into Impredicativity*, Berlin, Heidelberg, Springer, DOI : 10.1007/978-3-540-69319-2.

PRAWITZ, D. 1965, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Stockholm Studies in Philosophy, 3, Stockholm, Almqvist & Wiksell.

SCHÜTTE, K. 1977, *Proof Theory*, Berlin, Springer.

TAKEUTI, G. 1987, *Proof Theory*, 2e éd., Studies in Logic, 81, Amsterdam, North-Holland.

TROELSTRA, A. S. et H. Schwichtenberg 2000, *Basic Proof Theory*, 2e éd., Cambridge, Cambridge University Press.

9. Quelques manuels d'introduction à la théorie de la démonstration en français :

DAVID, R., K. Nour et C. Raffalli 2003, *Introduction à la logique. Théorie de la démonstration*, 2e éd., Paris, Dunod.

DOWEK, G. 2010, *Les démonstrations et les algorithmes. Introduction à la logique et à la calculabilité*, Palaiseau, Éditions de l'école Polytechnique, trad. angl. *Proofs and Algorithms. An Introduction to Logic and Computability*, London, Springer, 2011.