LOGISCH-KOMBINATORISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE ERFÜLLBARKEIT ODER BEWEISBARKEIT MATHEMATISCHER SÄTZE NEBST EINEM THEOREME ÜBER DICHTE MENGEN

VON

TH. SKOLEM

(Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat.-naturv Klasse. 1920. No. 4)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1920

Fremlagt i fællesmøtet den 21de mars 1919.

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

§ 1.

Vereinfachter Beweis eines Satzes von L. Löwenheim. Verallgemeinerungen des Satzes.

Im 76ten Bande der Mathematischen Annalen hat L. Löwenheim einen interessanten und sehr bemerkenswerten Satz über die sogenannten ‚Zählausdrücke' bewiesen. Dieser Satz sagt, dass jeder Zählausdruck entweder widerspruchsvoll ist oder schon innerhalb eines abzählbar unendlichen Denkbereichs erfüllbar ist. Unter einem Zählausdruck versteht Löwenheim einen Ausdruck, der mit Hülfe der 5 logischen Grundoperationen, nämlich in der Schröderschen Terminologie identische Multiplikation und Addition, Negation, Produktation und Summation, aus Relativkoeffizienten aufgebaut ist, wobei die Produktationen und Summationen sich auf die Individuen allein beziehen. Die 5 genannten Operationen werden bez. mit einem Punkte oder einfach Nebeneinanderstellung, dem Zeichen $+$, einem Strich $-$, Π- und Σ-Zeichen bezeichnet. Löwenheim beweist seinen Satz mit Hülfe der Schröderschen ‚Ausführung' der Produkte und Summen, ein Verfahren um ein Π-Zeichen vor einem Σ-Zeichen zu rücken oder umgekehrt. Dieses Verfahren ist aber etwas verwickelt und führt dazu, dass man Individuumsymbole als Subindizes bei den Relativkoeffizienten einführen muss. Ich will im folgenden einen einfacheren Beweis geben, bei welchen solche Subindizes vermieden werden, und ausserdem einige Hülfsätze, die auch an sich Interesse haben; endlich stelle ich auch einige Verallgemeinerungen des Löwenheimschen Satzes auf.

Statt von Zählausdrücken will ich lieber von Zählaussagen reden.

Def. 1. *Eine Zählaussage ist eine Aussage, die aus Schröderschen Relativkoeffizienten mit Hülfe der 5 obengenannten Operationen aufgebaut ist, wobei die Produktationen und Summationen sich allein auf die Individuen beziehen.*

Beispiele: 1) $\Pi_x \Sigma_y R_{xy}$. In Worten heisst dies: Für jedes x gibt es ein y, sodass die Relation R zwischen x und y besteht.

2) $\Sigma_x \Pi_y \Sigma_z (R_{xy} + T_{xyz})$. In Worten heisst dies: Es gibt ein x, sodass für jedes y ein z sich so bestimmen lässt, dass entweder die binäre Relation R zwischen x und y oder die ternäre T zwischen x, y und z stattfindet.

3) $\Sigma_x A_x . \Sigma_y \Pi_z R_{yz} S_{zx}$. In Worten heisst dies: Es gibt ein x, das zur Klasse A gehört, und ausserdem gibt es ein y, sodass für jedes z sowohl die Relation R zwischen y und z wie die Relation S zwischen z und x besteht.

Def. 2. *Eine Zählaussage soll von der Normalform heissen, wenn sie so geschrieben ist, dass zuerst Π-Zeichen kommen, dann Σ-Zeichen, und darauf ein Ausdruck folgt, der von Π- und Σ-Zeichen frei ist. Doch soll auch jede Zählaussage, die nur Π- oder nur Σ-Zeichen enthält von der Normalform heissen, wenn nur diese Zeichen zuerst stehen und auf einander folgen.*

Beispiele: $\Pi_x \Sigma_y R_{xy}$ besitzt die Normalform; ebenso $\Pi_x \Sigma_y \Sigma_z (R_{xy} + S_{yz})$ und $\Pi_x \Pi_y \Sigma_z (R_{xy} S_{xz} + A_x)$. Dagegen ist $\Sigma_x \Pi_y R_{xy}$ nicht von der Normalform. $\Pi_x (A_x + B_x)$ und $\Sigma_x A_x$ sind aber wieder von der Normalform.

Satz 1. *Ist U eine beliebige Zählaussage, so gibt es eine Zählaussage U' von der Normalform so beschaffen, dass U immer und nur dann innerhalb eines gegebenen Denkbereichs erfüllbar ist, wenn U' erfüllbar ist, und umgekehrt.*

Beweis: Wir können zuerst eine Aussage der Form

$$(1) \quad \Pi_{x_1} \Pi_{x_2} \ldots \Pi_{x_m} \Sigma_{y_1} \Sigma_{y_2} \ldots \Sigma_{y_n} \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} U_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n, z_1 \ldots z_p}$$

betrachten, wo $U_{x_1 \ldots z_p}$ eine Aussage ist, die aus Relativkoeffizienten unter ausschliesslicher Anwendung der 3 Operationen, identische Multiplikation und Addition und Negation, aufgebaut ist. Wir können hier einen Relativkoeffizienten $R_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n}$ einführen, wobei wir

$$R_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n} = \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} U_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n, z_1 \ldots z_p}$$

für alle Werte von $x_1 \ldots x_m$, $y_1 \ldots y_n$ setzen, also wenn man will:

$$(2) \quad \Pi_{x_1} \ldots \Pi_{x_m} \Pi_{y_1} \ldots \Pi_{y_n} (R_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n} = \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} U_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n, z_1 \ldots z_p}).$$

Es ist klar, dass wie nun überhaupt die Relative gewählt sein mögen, deren Koeffizienten in U verkommen, so gibt es innerhalb des Denkbereichs (oder genauer innerhalb des Bereichs 1^{m+n} in Schröderscher Bezeichnung) ein Relativ R $(m+n)$ter Ordnung von solcher Beschaffenheit, dass (2) erfüllt ist. In der Tat ist ja (2) weiter nichts als eine gewöhnliche Definition einer Relation R. Die Aussage (2) lässt sich nun zu

$$\Pi_{x_1} \ldots \Pi_{x_m} \Pi_{y_1} \ldots \Pi_{y_n} (R_{x_1 \ldots y_n} + \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} U_{x_1 \ldots z_p})$$
$$(\Sigma_{u_1} \ldots \Sigma_{u_p} U_{x_1 \ldots y_n u_1 \ldots u_p} + R_{x_1 \ldots y_n})$$

und dies wieder zu

$$(3) \quad \Pi_{x_1} \ldots \Pi_{x_m} \Pi_{y_1} \ldots \Pi_{y_n} \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} \Sigma_{u_1} \ldots \Sigma_{u_p}$$
$$(R_{x_1 \ldots y_n} + U_{x_1 \ldots y_n z_1 \ldots z_p})(R_{x_1 \ldots y_n} + U_{x_1 \ldots y_n u_1 \ldots u_p})$$

umformen, und (3) besitzt die Normalform. Zufolge (2) kann aber (1) auch als

$$(4) \qquad \Pi_{x_1} \ldots \Pi_{x_m} \Sigma_{y_1} \ldots \Sigma_{y_n} R_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n}$$

geschrieben werden, was auch von der Normalform ist. Endlich kann die logische Konjunktion (Aussagenprodukt) von (3) und (4) so geschrieben werden:

$$(5) \quad \Pi_{\xi_1} \ldots \Pi_{\xi_m} \Pi_{x_1} \ldots \Pi_{x_m} \Pi_{y_1} \ldots \Pi_{y_n} \Pi_{z_1} \ldots \Pi_{z_p} \Sigma_{\eta_1} \ldots \Sigma_{\eta_p} \Sigma_{u_1} \ldots \Sigma_{u_p}$$
$$R_{\xi_1 \ldots \xi_m \eta_1 \ldots \eta_n} (R_{x_1 \ldots y_n} + U_{x_1 \ldots y_n z_1 \ldots z_p})(R_{x_1 \ldots y_n} + U_{x_1 \ldots y_n u_1 \ldots u_p}).$$

Diese Aussage hat auch die Normalform.

Gibt es nun innerhalb des gegebenen Denkbereichs solche Werte der in (1) auftretenden Relativsymbole, dass (1) befriedigt ist, so wird es auch möglich sein innerhalb des Bereichs solche Werte der in (5) auftretenden Relativsymbole anzugeben, dass (5) befriedigt wird. In der Tat sind von R abgesehen, die in (5) auftretenden Relativsymbole dieselben wie in (1), und R kann kraft der ‚Definition' (2) immer gefunden werden, wenn die in (1) vorkommenden Relative bekannt sind. Dass umgekehrt auch (1) erfüllbar ist, wenn (5) erfüllbar ist, ist ohne weiteres klar, da (5) die logische Konjunktion von (2) und (4) ist, woraus (1) folgt.

Hierdurch ist die Richtigkeit von Satz 1 für den Fall bewiesen, dass nur zweimal ein Wechsel zwischen Π- und Σ-Zeichen auftritt. Es ist aber jetzt leicht zu sehen, wie der allgemeine Beweis geführt werden soll.

Es sei nämlich die Aussage

$$(6) \quad \Pi_{x_1 \ldots x_{n_1}} \Sigma_{x_{n_1+1} \ldots x_{n_1+n_2}} \Pi_{x_{n_1+n_2+1} \ldots x_{n_1+n_2+n_3}} \ldots\ldots$$
$$\Sigma_{x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1} \ldots x_{n_1+\cdots+n_\gamma}} U_{x_1 \ldots x_{n_1+n_2+\cdots+n_\gamma}}$$

gegeben. (Ich setze also hier voraus, dass zuletzt Σ-Zeichen auftreten, während wir in dem eben betrachteten Falle zuletzt Π-Zeichen hatten; das Verfahren ist aber immer dasselbe.) Dann definiere ich eine Reihe von Hülfsrelationen durch folgende Gleichungen:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\Sigma_{x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+1}} \Sigma_{x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-1}+2}} \cdots \Sigma_{x_{n_1+n_2+\cdots+n_\gamma}} U_{x_1 \ldots x_{n_1+\cdots+n_\gamma}} = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad R^{(1)}_{x_1 \ldots x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-1}}}, \\
\Pi_{x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-2}+1}} \Pi_{x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-2}+2}} \cdots \Pi_{x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-1}}} R^{(1)}_{x_1 \ldots x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-1}}} = \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad R^{(2)}_{x_1 \ldots x_{n_1+\cdots+n_{\gamma-2}}}, \\
\text{usw. bis} \\
\Pi_{x_{n_1+n_2+1}} \Pi_{x_{n_1+n_2+2}} \cdots \Pi_{x_{n_1+n_2+n_3}} R^{(\gamma-3)}_{x_{n_1} \ldots x_{n_1+n_2+n_3}} = R^{(\gamma-2)}_{x_{n_1} \ldots x_{n_1+n_2}}
\end{cases}
$$

Hier soll eigentlich zu jeder Gleichung Π-Zeichen hinzugefügt werden, nämlich über alle frei vorkommenden Variabeln x. Man überzeugt sich dann leicht, dass sich jede dieser Aussagen, also Definitionen von $R^{(1)}$, $R^{(2)}\ldots$, auf die Normalform bringen lässt in derselben Weise, wie wir oben (2) auf die Normalform (3) brachten. Dann lässt sich aber natürlich auch die logische Konjunktion dieser Definitionen von $R^{(1)}$, $R^{(2)}\ldots$ in der Normalform schreiben. Kraft (7) nimmt aber die Aussage (6) die Gestalt

$$
(8)\qquad \Pi_{x_1 \ldots x_{n_1}} \Sigma_{x_{n_1+1} \ldots x_{n_1+n_2}} R^{(\gamma-2)}_{x_1 \ldots x_{n_1+n_2}}
$$

an, was auch von der Normalform ist. Die logische Konjunktion von (7) und (8) lässt sich deshalb auch als eine Aussage U' von Normalform schreiben. Kann man nun solche Werte der in (6) auftretenden Relativsymbole finden, dass (6) erfüllt ist, so können $R^{(1)}$, $R^{(2)}, \ldots$ successive nach (7) gefunden werden, und dadurch wird U' erfüllt. Wird umgekehrt U' befriedigt für gewisse Werte der in U' auftretenden Relativsymbole, so sind (7) und (8) erfüllt und also auch (6). Die Richtigkeit von Satz 1 ist hierdurch allgemein bewiesen.

Die Frage, wann eine Zählaussage erfüllbar ist, kann also durch die einfachere ersetzt werden, wann eine Aussage von der Normalform erfüllbar ist. Was dies betrifft, gilt folgender Satz:

Satz 2. *Jede Aussage von Normalform ist entweder ein Widerspruch oder schon innerhalb eines endlichen oder eines abzählbar unendlichen Denkbereichs erfüllbar.*

Dieser Satz könnte jetzt äusserst leicht in der von Löwenheim angegebenen Weise bewiesen werden, aber *ohne Anwendung von Individuensymbolen als Subindizes.* Indessen will ich lieber den Beweis in einer anderen Weise führen, bei welcher nicht mit successiven Auswahlen

resonniert wird, sondern mehr direkt nach den gewöhnlichen Verfahren der mathematischen Logik vorgegangen wird.[1]

Zuerst können wir den einfachst möglichen Fall einer Zählaussage von der Normalform, die doch sowohl Π- wie Σ-Zeichen hat, betrachten, nämlich

$$\Pi_x \Sigma_y U_{xy},$$

wo U_{xy} eine Aussage ist, die aus Relativkoeffizienten mit nur x und y als Indizes mit Hülfe von Konjunktion, Disjunktion und Negation aufgebaut ist. Nehmen wie nun an, dass diese Aussage innerhalb eines gegebenen Denkbereichs für gewisse Werte der Relative erfüllt ist. Dann können wir *kraft des Auswahlprinzips* für jedes x ein eindeutig bestimmtes y gewählt denken, sodass U_{xy} wahr wird. Das ist ja eine Auswahl eines Elementes aus jeder der Klassen, die man bekommt, wenn man für jedes x die y zusammenfasst, für welche U_{xy} wahr ist. Hierdurch ist eine eindeutige Abbildung des Bereiches in sich definiert. Es sei für jedes x x' das Bild von x. Dann ist also die Aussage $U_{xx'}$ wahr für jedes x für die angenommenen Werte der Relativsymbole. Wir können dies so schreiben:

$$\overset{O}{\Pi_x} U_{xx'},$$

wo O der Denkbereich ist. Es sei a ein spezielles Individuum von O. Dann gibt es gewisse Klassen X innerhalb O, die erstens a als Element enthalten (X_a ist wahr) und zweitens immer x' enthalten, wenn sie x enthalten ($X_{x'}$ immer wahr, wenn X_x wahr ist, oder m. a. W. $\bar{X}_x + X_{x'}$ wahr für jedes x). Es sei nun X^0 das logische (identische) Produkt (Durchschnitt) aller dieser Klassen. Dann ist X^0 wie bekannt entweder eine endliche oder eine abzählbar unendliche Klasse (Vergl. die Kettentheorie von R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen). Weiter ist aber klar, dass

$$\overset{X^0}{\Pi_x} U_{xx'}$$

stattfinden muss. Hierdurch ist also bewiesen, dass wenn $\Pi_x \Sigma_y U_{xy}$ innerhalb eines Bereiches O erfüllt ist, sie auch innerhalb eines endlichen oder abzählbar unendlichen Denkbereichs erfüllbar ist.

Um Satz 2 allgemein zu beweisen ist es am bequemsten zuerst ein Paar einfache Hülfsätze zu beweisen.

---

[1] Für die späteren allgemeineren Sätzen dieses Paragraphen führe ich die Beweise in einer Weise, die der Löwenheimschen Beweisführung mehr ähnlich ist.

Hülfsatz 1. Es sei $R_{x_1 x_2 \ldots x_m y_1 \ldots y_n}$ eine Relation $(m+n)$ter Ordnung von solcher Beschaffenheit, dass wenn $x_1 \ldots x_m$ beliebig gegeben sind (innerhalb des gegebenen Bereichs O) ein und nur ein y_1, ein und nur ein y_2 usw. bis ein und nur ein y_n vorhanden ist, sodass $R_{x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n}$ stattfindet. Es sei K eine beliebige endliche Klasse und K_1 die Klasse aller Werte von $y_1 \ldots y_n$, die zu den verschiedenen möglichen Wahlen von $x_1 \ldots x_m$ innerhalb K gehören. Weiter soll $K' = K + K_1$, die Summe der beiden Klassen K und K_1, sein. Dann ist K' auch eine endliche Klasse.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist ja ganz klar. Besteht K aus k Dingen, so gibt es überhaupt k^m mögliche Auswahlen von $x_1 \ldots x_m$ und also auch k^m zugehörige Reihen $y_1 \ldots y_n$. Die Zahl der Elemente von K_1 ist also höchstens $k^m n$, und K' enthält höchstens $k^m n + k$ Dinge.

Hülfsatz 2. Es sei R ein Relativ $(m+n)$ter Ordnung von der in Hülfsatz 1 erwähnten Beschaffenheit, und es sei Ξ das logische Produkt aller Klassen X, die folgende zwei Eigenschaften besitzen:

1) a ist Element von X;

2) wenn $x_1 \ldots x_m$ innerhalb X beliebig gewählt sind, so enthält X auch die Dinge $y_1 \ldots y_n$, für welche $R_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n}$ stattfindet.

Dann ist Ξ entweder eine endliche oder eine abzählbar unendliche Klasse.

Beweis: Wir können mit K_1 die Klasse aller Dinge y bezeichnen, die in den Reihen $y_1 \ldots y_n$ vorkommen, welche zu den verschiedenen möglichen Wahlen von $x_1 \ldots x_m$ innerhalb K gehören, und allgemein unter K' die Klasse $K + K_1$ verstehen. Der Übergang von K zu K' gibt uns also eine eindeutige Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Klassen in sich selbst. Ich will mit $\{a\}$ die Klasse bezeichnen, die a und nur a als Element enthält. Ich betrachte dann zuerst diejenigen Klassen von Klassen, welche die zwei Eigenschaften haben: 1) $\{a\}$ als Element zu enthalten und 2) mit einer Klasse K immer K' als Element zu enthalten. Es sei A der Durchschnitt dieser Klasse von Klassen. A ist dann eine gewöhnliche Dedekindsche Kette und besteht bekanntlich aus den Klassen $\{a\}$, $\{a\}'$, $\{a\}''$ usw. in. inf. Die Klassen, die Elemente von A sind, brauchen aber nicht alle von einander verschieden zu sein; jedenfalls ist aber A eine endliche oder eine abzählbar unendliche Klasse von Klassen.

Ausserdem ist zufolge Hülfsatz 1 klar, dass jedes Element von A eine endliche Klasse sein muss. Denn erstens ist $\{a\}$ endlich, und zweitens ist immer K' endlich, wenn K endlich ist. Die Klasse aller endlichen Klassen muss nach der Definition von A also A ganz enthalten, d. h. jedes Element von A ist eine endliche Klasse.

Nach bekannten mengentheoretischen Sätzen folgt dann, dass die Summe aller Klassen, die Elemente von A sind, — es sei SA diese Summe —, eine endliche oder eine abzählbar unendliche Klasse sein muss.

Endlich lässt sich zeigen, dass $\Xi = SA$ ist. Wir haben ja erstens, dass $\{a\}$ in Ξ als Unterklasse enthalten ist, und es ist klar, dass wenn K Unterklasse von Ξ ist, so ist auch K' Unterklasse von Ξ. Hieraus folgt, dass jedes Element von A Unterklasse von Ξ ist, und daraus folgt, dass SA in Ξ als Unterklasse enthalten ist. Umgekehrt muss aber auch Ξ Unterklasse von SA sein. Denn a ist Element von SA, und wenn $x_1 \ldots x_m$ beliebig innerhalb SA gewählt werden, so gibt es, da $\{a\}$ Unterklasse von $\{a\}'$, $\{a\}'$ wieder Unterklasse von $\{a\}''$ ist, usw., ein Element K von A, das auf einmal $x_1 \ldots x_m$ enthält, und dann gehört jedes y der zugehörigen Reihe $y_1 \ldots y_n$ zu K', dem folgenden Element von A, und folglich gehören alle diese y zu SA. Nach der Definition von Ξ muss dann Ξ Unterklasse von SA sein. Also ist $SA = \Xi$, woraus folgt, dass Ξ entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.

Der Beweis des Satzes 2 ist nun leicht zu führen. Es soll eine Zählaussage von der Normalform

$$\Pi_{x_1} \ldots \Pi_{x_m} \Sigma_{y_1} \ldots \Sigma_{y_n} U_{x_1 \ldots x_m,\ y_1 \ldots y_n}$$

gegeben sein, und wir sollen annehmen, diese sei für gewisse Werte der in U auftretenden Relativsymbole innerhalb eines gegebenen Denkbereiches erfüllt. Nach dem Auswahlprinzip können wir dann zu jeder Wahl von $x_1 \ldots x_m$ unter den zugehörigen Reihen $y_1 \ldots y_n$, d. h. den Reihen $y_1 \ldots y_n$, für welche $U_{x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n}$ wahr ist, eine bestimmte ausgewählt denken: Wir können passend mit $y_1(x_1 \ldots x_m)$, $y_2(x_1 \ldots x_m)$, ..., $y_n(x_1 \ldots x_m)$ oder kürzer $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... $y_n(x)$ die Reihe der y bezeichnen, die zu der Reihe $x_1 \ldots x_m$ gehören. Dann gilt also die Aussage

$$U_{x_1 \ldots x_m,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)}$$

für jede Wahl von $x_1 \ldots x_m$. Ausserdem ist $U_{x_1 \ldots x_m, y_1(x), \ldots y_n(x)}$ eine Relation von der in den Hülfsätzen betrachteten Beschaffenheit. Lassen wir also a ein spezielles Individuum sein, und lassen wir Ξ den Durchschnitt aller Klassen X sein, die a als Element enthalten und mit $x_1 \ldots x_m$ zugleich die y der Reihe $y_1(x_1 \ldots x_m)$, $y_2(x_1 \ldots x_m)$, ..., $y_n(x_1 \ldots x_m)$ enthalten, so ist Ξ entweder endlich oder abzählbar unendlich, und ausserdem gilt natürlich

$$U_{x_1 \ldots x_m, y_1(x), \ldots, y_n(x)}$$

für alle mögliche Wahlen von $x_1 \ldots x_m$ innerhalb Ξ, wobei auch immer $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ zu Ξ gehören, so oft $x_1 \ldots x_m$ zu Ξ gehören.

Der Satz 2 lässt in hohem Grade Verallgemeinerungen zu. So ist nicht schwer zu beweisen, dass auch das gleichzeitige Erfülltsein einer einfach unendlichen Reihe von Zählaussagen der Normalform entweder ein Widerspruch ist oder schon innerhalb eines abzählbar unendlichen Denkbereichs möglich ist. Mit Hülfe der oben angegebenen Zurückführung beliebiger Zählaussagen auf die Normalform sieht man dann ein, dass dies auch fur jedes Produkt einer einfach unendlichen Reihe beliebiger Zählaussagen gelten muss. Dass ein solcher Satz auch bestehen wird, falls noch logische Disjunktionen in unendlicher Zahl vorkommen, soll auch unten bewiesen werden. Ich will mich hier der einfacheren Darstellung halber darauf beschränken einen Beweis für den Fall zu geben, dass wir ein logisches Produkt einer einfach unendlichen Reihe von Aussagen der Form $\Pi_x \Sigma_y U_{xy}$ haben. Die Ausdehnung zu dem allgemeinen Falle einer unendlichen Reihe beliebiger Aussagenfaktoren der Normalform bietet keine prinzipielle Schwierigkeit.

Es sei also das Aussagenprodukt

$$\Pi_{x_1} \Sigma_{y_1} U^1_{x_1 y_1} \Pi_{x_2} \Sigma_{y_2} U^2_{x_2 y_2} \ldots \text{ in. inf.} \tag{9}$$

gegeben, wo die U Aussagen sind, die aus Relativkoeffizienten mit Hülfe von Konjunktion, Disjunktion und Negation allein in endlicher Zahl von Anwendungen aufgebaut sind. Wir brauchen natürlich nicht den Fall näher zu betrachten, da zwei beliebige der Aussagenfaktoren des Produktes (9) überhaupt kein gemeinsames Relativsymbol haben; denn wenn das ganze Aussagenprodukt dann nicht ein Widerspruch ist, so ist ohne weiteres klar, dass keine der Faktoraussagen ein Widerspruch ist, und dann kann jede der letzteren für sich innerhalb eines abzählbar unendlichen Bereichs erfüllt werden. Da aber die Faktoraussagen in diesem Falle vollständig von einander unabhängig sind, wird dadurch auch das ganze Produkt zu einer wahren Aussage. Wenn die einzelnen Aussagenfaktoren nie gemeinsame Relativsymbole haben, so ist übrigens klar, dass die Voraussetzung einer abzählbaren Menge von Faktoren nicht nötig ist. Wir betrachten also weiter nur den Fall, da die Faktoren gemeinsame Relativsymbole besitzen.

Nehmen wir jetzt an, dass die Aussage (9) innerhalb eines Bereiches O erfüllt ist. Dann ist à fortiori für jedes r die Aussage

$$\Pi_{x_r} \Sigma_{y_r} U^r_{x_r, y_r}$$

erfüllt. Kraft des Auswahlprinzips können wir dann für jedes x_r unter den y_r, für welche $U^r_{x_r, y_r}$ wahr ist, ein eindeutig bestimmtes auswählen;

bezeichnen wir dies mit $y_r(x_r)$. Wir wählen ausserdem ein beliebiges Individuum in O und nennen es 1. Dann soll weiter $y_1(1)$ 2 heissen, $y_1(2)$ soll 3 heissen, $y_2(1)$ soll 4 heissen usw. Das Gesetz dieser successiven Namengebung wird aus der folgenden Tabelle klar werden:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & y_1(1) = 2 & & & & \\
 & & & y_1(2) = 3 & & y_2(1) = 4 & & & \\
 & & y_1(3) = 5 & & y_1(4) = 6 & & y_2(2) = 7 & & y_3(1) = 8 \\
y_1(5) = 9 & y_1(6) = 10 & & y_1(7) = 11 & & y_1(8) = 12 & & y_2(3) = 13 & y_2(4) = 14 \\
 & & & y_3(2) = 15 & & y_4(1) = 16 & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Nun sind der Annahme nach die Aussagen $U^r_{x_r, y_r(x_r)}$ alle wahr, und folglich muss auch das Aussagenprodukt

$$U^1_{12} U^1_{23} U^1_{35} \ldots U^2_{14} U^2_{27} \ldots U^3_{18} U^3_{2,15} \ldots U^4_{1,16} \ldots\ldots$$

wahr sein. Daraus sieht man aber, dass die Aussage

$$\Pi_{x_1} \Sigma_{y_1} U^1_{x_1 y_1} \Pi_{x_2} \Sigma_{y_2} U^2_{x_2 y_2} \ldots$$

erfüllt ist, selbst wenn die Produktionen und Summationen nur über die Werte 1, 2, 3, ... der Indizes ausgedehnt wird; d. h. die Aussage (9) ist auch innerhalb eines abzählbaren Denkbereichs erfüllbar.

Es gilt also der folgende Satz:

Satz 3. *Ist eine Aussage darstellbar als ein Produkt einer abzählbaren Menge von Zählaussagen, so ist sie entweder ein Widerspruch, oder sie ist schon innerhalb eines abzählbaren Denkbereichs erfüllbar.*

Anm.: Aussagen dieser Form wird man leicht erhalten, wenn man mit Kettenbildungen zu tun hat. Bezeichnet z. B. $\overset{*}{R}$ die zu der binären Relation R gehörende Kette (die ‚Nachkommen'-Relation von Russell & Whitehead [1]), so ist

$$\overset{*}{R}_{xy} = I_{xy} + R_{xy} + \Sigma_z R_{xz} R_{zy} + \Sigma_u \Sigma_v R_{xu} R_{uv} R_{vy} + \ldots\ldots,$$

wo I die Schrödersche Bezeichnung der Relation ‚identisch mit' ist. Die Negation von $\overset{*}{R}_{xy}$ wird dann ein Produkt einer unendlichen Reihe von Zählaussagen sein.

Um die Frage beantworten zu können, wie es gehen wird, wenn auch unendlich viele Anwendungen der Disjunktion in der gegebenen Aussage vorkommen, hat man vor allem die folgende selbstverständliche Tatsache zu beachten:

[1] Principia Mathematica, Vol. 1, p. 569.

Eine Aussagensumme ist innerhalb eines Bereichs für gewisse Werte der vorkommenden Relativsymbole immer und nur dann erfüllt, wenn mindestens eine der Summandaussagen für eben diese Werte der Symbole erfüllt ist.

Es lässt sich dann der folgende Satz beweisen:

Satz 4. *Eine Summe (abzählbar oder nicht-abzählbar) unendlich vieler Zählaussagen ist entweder überhaupt nicht erfüllbar, oder sie ist schon innerhalb eines abzählbar unendlichen Denkbereichs für gewisse Werte der auftretenden Relativsymbole erfüllt.*

Beweis: Wenn die gegebene Aussagensumme U innerhalb eines Bereichs für gewisse Werte der vorkommenden Relativsymbole erfüllt ist, so muss (nach der eben gemachten Bemerkung) mindestens einer der Summanden — es sei A ein solcher — für eben diese Werte der Symbole erfüllt sein. Da aber alle Summanden Zählaussagen sein sollen, so muss nach Satz 2 A schon innerhalb eines abzählbaren Bereichs für gewisse Werte der in A auftretenden Symbole erfüllt sein. Dadurch wird nun auch die ganze Aussagensumme U in dem abzählbaren Bereiche erfüllt, wenn noch für die eventuel in U aber nicht in A vorkommenden Relativsymbole beliebige Werte in eben diesem abzählbaren Bereiche gewählt werden.

Man sieht nun auch leicht ein, dass *überhaupt alle Aussagen, die mit Hülfe von endlich oder abzählbar unendlich vielen Anwendungen der Konjunktion und der Disjunktion aus Zählaussagen aufgebaut sind, schon im abzählbar Unendlichen erfüllt werden können, wenn sie überhaupt erfüllt werden können.*

Erstens ist klar, dass *eine unendliche Summe* $U_1 + U_2 + \ldots$, *wobei jedes* U_r *ein Produkt unendlich vieler Zählaussagen* U_r^s $(s = 1, 2, \ldots)$ *ist, entweder nie erfüllt oder schon im abzählbar Unendlichen erfüllt ist.* Der Beweis dafür kann in der Tat ganz genau in derselben Weise wie der Beweis für Satz 4 geführt werden, wobei der Satz 3 zur Anwendung kommt.

Weiter haben wir auch den folgenden Satz:

Satz 5. *Es sei die Aussage U das Produkt der unendlich vielen Aussagen U_r, deren jede wieder die Summe unendlich vieler Zählaussagen ist, nämlich*

$$U_r = \sum_1^\infty{}_s\, U_r^s,$$

wobei jedes U_r^s eine Zählaussage. Dann ist U entweder nie erfüllt oder schon in einem abzählbaren Bereiche bei passender Wahl der Werte der Relativsymbole erfüllt.

Beweis: Die Aussagenmultiplikation lässt sich ausführen, sodass U eine Summe von Produkten von Zählaussagen wird, obwohl die Menge dieser Produkte allerdings nicht abzählbar ist. Ist U für gewisse Werte der auftretenden Relativsymbole erfüllt, so muss also mindestens ein Summand für dieselben Werte der Symbole erfüllt sein. Ein solcher Summand ist aber das Produkt einer einfach unendlichen Reihe von Zählaussagen und ist also nach Satz 3 schon in einem abzählbaren Bereiche erfüllt. Dann ist auch U selbst in dem abzählbaren Bereiche erfüllt, wenn noch für die eventuel in U aber nicht in dem betreffenden Summand vorkommenden Relativsymbole beliebige Werte innerhalb dieses abzählbaren Bereichs gewählt werden.

Dieselbe Beweismethode lässt sich natürlich auch anwenden, wenn die gegebene Aussage noch komplizierter aufgebaut ist. Wir könnten z. B. einen ganz ähnlichen Satz über alle diejenigen Aussagen U beweisen, die ein Produkt unendlich vieler Aussagen U_{r} sind, deren jede eine Summe der Aussagen $U_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}}$ ist, wobei jedes $U_{\mathrm{r}}^{\mathrm{s}}$ das Produkt der Aussagen $U_{\mathrm{r,\,r'}}^{\mathrm{s}}$ ist, deren jede wieder eine Summe der Zählaussagen $U_{\mathrm{r,\,r'}}^{\mathrm{s,\,s'}}$ ist. Usw.

Aus diesen Sätzen folgt u. a. das folgende interessante Ergebnis:

Satz 6: *Jede Aussage, die aus Relativkoeffizienten mit Hülfe endlich vieler Anwendungen der Konjunktion, Disjunktion, Negation, Produktation und Summation über Individuumsymbole sowie der Kettenbildung aufgebaut ist, ist entweder nie erfüllt oder schon innerhalb eines abzählbaren Denkbereichs für gewisse Werte der Relativsymbole erfüllt.*

Die Richtigkeit dieses Satzes ist ja ganz klar, da jede Aussage, die durch eine Kettenbildung zu Stande kommt, in Form einer einfach unendlichen Summe von Zählaussagen geschrieben werden kann. Vergl. die Anmerkung Seite 11.

Beispiele: Eine Relativgleichung wie die folgende (es sollen bloss binäre Relative vorkommen, und die Bezeichnungen sind Schrödersche ausgenommen die Bezeichnung $\overset{*}{R}$ für die Kette von R und das Zeichen $\dot{+}$ für die relative Addition (vergl. die Anmerkung Seite 11)):

$$(\mathrm{x}\breve{\mathrm{x}} + \breve{\mathrm{x}}\,\mathrm{x})\,\dot{+}\,\overset{*}{\mathrm{x}};\ \mathrm{x}\,\dot{+}\,\overset{*}{\mathrm{x}};\ \mathrm{x} = 0$$

ist entweder in keinem Bereiche oder schon in einem abzählbar unendlichen Bereiche lösbar.

Ebenso ist auch die Relativgleichung

$$(\overset{*}{\mathrm{x}} + \overset{*}{\mathrm{y}})\,(\overset{*}{\breve{\mathrm{x}}} + \overset{*}{\mathrm{y}});\ (\mathrm{x}\,\dot{+}\,\mathrm{y})\,\dot{+}\,\mathrm{x};\ \mathrm{y} = 0$$

entweder überhaupt nicht oder schon in einem abzählbaren Bereiche lösbar.

Ganz dasselbe gilt natürlich auch für die folgende Gleichung:

$$(x, y) + (\overset{*}{x}, y); x\, y = 0,$$

wobei (u, v) für beliebige Werte der binären Relative u und v das Relativ $1' + u; v + u; u; v; v + u; u; u; v; v; v + \ldots$ in inf. bedeuten soll.

Usw.

Ich will aber auch andere Verallgemeinerungen des Satzes 2 angeben. Auch folgender Satz gilt:

Satz 7. *Eine Aussage der Form*

$$\underset{x_1\, x_2}{\Pi\Pi} \ldots \underset{x_m\, y_1\, y_2 \text{ in inf.}}{\Pi\, \Sigma\, \Sigma} \ldots U_{x_1 \ldots x_m,\, y_1,\, y_2 \ldots \text{ in inf.}}$$

ist entweder ein Widerspruch oder innerhalb eines abzählbaren Denkbereichs für gewisse Werte der in U vorkommenden Relativsymbole erfüllt.

Beweis: Wir nehmen an, eine Aussage dieser Form sei innerhalb eines Bereichs O für gewisse Werte der Relativsymbole erfüllt. Dann denken wir uns nach dem Auswahlprinzip für jede Wertreihe $x_1 \ldots x_m$ unter den Wertreihen $y_1, y_2, \ldots$, für welche $U_{x_1 \ldots x_m,\, y_1,\, y_2, \ldots}$ wahr ist, eine bestimmte ausgewählt. Die in dieser Reihe vorkommenden y bezeichne ich als $y_r(x_1, \ldots, x_m)$ oder kürzer als $y_r(R)$, wenn R die Reihe der x bezeichnet. Es sei a ein spezielles Individuum in O. Die Dinge $y_r(a, a, \ldots, a)$ bilden dann höchstens eine abzählbar unendliche Menge M_1'. (Sie kann ja auch eine endliche Menge sein, da diese y nicht alle verschieden zu sein brauchen). Es sei M_1 die Menge, welche die Elemente von M_1' und ausserdem auch a enthält, also $M_1 = M_1' + \{a\}$. M_1 ist dann höchstens abzählbar unendlich. Die Wertreihen $x_1 \ldots x_m$, die innerhalb M_1 gewählt werden können und von der schon betrachteten Reihe $a, a, \ldots, a$ verschieden sind, bilden auch wieder eine höchstens abzählbar unendliche Menge. Die zu diesen Wertreihen R gehörenden Reihen der y bilden also auch eine höchstens abzählbare Menge, und dasselbe gilt für die in diesen Reihen vorkommenden Dinge $y_r(R)$. Es sei M_2' die Menge dieser y und $M_2 = M_1 + M_2'$. Die Menge aller Wertreihen $x_1 \ldots x_m$, die in M_2 aber nicht schon in M_1 gewählt werden können, ist wieder höchstens abzählbar. Folglich ist die Menge der zugehörigen Reihen $y_r(x_1 \ldots x_m)$ ebenso wie auch die Menge der darin vorkommenden Dinge $y_r(x_1 \ldots x_m)$ selbst höchstens abzählbar. Es sei M_3' die Menge dieser y und $M_3 = M_2 + M_3'$. In dieser Weise wird ins Unendliche fortgesetzt. Man bekommt eine unendliche Reihe stets umfassenderer Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots$. Die Limesmenge $M_\omega = M_1 + M_2 + \ldots$ ist dann auch höchstens abzählbar unendlich. Wenn $x_1 \ldots x_m$ beliebig innerhalb M_ω gewählt werden, so müssen $x_1, x_2, \ldots x_m$ schon bez. in den Mengen $M_{\gamma_1}, M_{\gamma_2}, \ldots, M_{\gamma_m}$ vorkommen,

wo $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ endliche Zahlen sind, und unter diesen Zahlen gibt es eine grösste γ. Dann kommen $x_1, \ldots, x_m$ alle in M_γ vor, und folglich kommt jedes $y_r(x_1, \ldots, x_m)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ in M'_γ, also in $M_{\gamma+1}$ und also auch in M_ω vor. Ausserdem gilt die Aussage

$$U_{x_1 \ldots x_m,\ y_1(x_1 \ldots x_m),\ y_2(x_1 \ldots x_m),\ \ldots\ldots}$$

für jede Wahl von $x_1, \ldots, x_m$ innerhalb M_ω. Hierdurch ist der Satz bewiesen.

In ähnlicher Weise kann auch der folgende noch allgemeinere Satz bewiesen werden:

Satz 8. *Ist eine Aussage U das Produkt einer abzählbaren Menge von Aussagen der in Satz 7 erwähnten Form, so ist U schon innerhalb eines abzählbar unendlichen Denkbereichs für gewisse Werte der in U vorkommenden Relativsymbole erfüllt, falls U überhaupt erfüllt werden kann.*

Beweis: Ist die Aussage $U = \prod_{1}^{\infty}{}_r\, U_r$, wo für jedes r U_r eine Aussage der Form

$$\prod_{x_1^r} \prod_{x_2^r} \ldots \prod_{x_{m_r}^r} \sum_{y_1^r} \sum_{y_2^r} \ldots U^r_{x_1^r \ldots x_{m_r}^r\, y_1^r,\, y_2^r, \ldots}$$

ist, für gewisse Werte der vorkommenden Relative erfüllt, so denken wir uns zu jeder Reihe $x_1^r \ldots x_{m_r}^r$ unter den zugehörigen Reihen $y_1^r, y_2^r, \ldots$, für welche U^r wahr ist, eine bestimmte ausgewählt. Für jede Wahl der Zahl r und der Dinge $x_1^r \ldots x_{m_r}^r$ sind dann $y_1^r, y_2^r \ldots$ eindeutig bestimmt. Es sei a ein spezielles Individuum des Bereichs. Dann bilden die zu der Wahl $x_1^1 = a, x_2^1 = a, \ldots, x_{m_1}^1 = a$ gehörenden Dinge y höchstens eine abzählbare Menge M'_1. Es sei $M_1 = M'_1 + \{a\}$. Die verschiedenen neuen Wertreihen $x_1^1 \ldots x_{m_1}^1$ mit den überhaupt möglichen Wertreihen $x_1^2 \ldots x_{m_2}^2$ innerhalb M_1 bilden wieder eine höchstens abzählbare Menge, und die in den zu diesen Reihen gehörigen Reihen der y vorkommenden Dinge y bilden deshalb auch eine höchstens abzählbar unendliche Menge M'_2. Es sei $M_2 = M_1 + M'_2$. Dann bilden die Wertreihen $x_1^1 \ldots x_{m_1}^1$, $x_1^2 \ldots x_{m_2}^2$, $x_1^3 \ldots x_{m_3}^3$, die innerhalb M_2 gewählt werden können aber nicht schon in M_1 gewählt waren, höchstens eine abzählbare Menge, und ebenso auch die Dinge y, welche in den verschiedenen zugehörigen Reihen vorkommen. Es sei M'_3 diese letzte Menge und $M_3 = M_2 + M'_3$. In dieser Weise wird ins Unendliche fortgesetzt und man bekommt zuletzt eine Limesmenge M_ω, die Summe der wachsenden Mengen $M_1, M_2, \ldots$, die auch höchstens abzählbar unendlich ist, während wie leicht einzusehen jede der Aussagen U_r und folglich U innerhalb M_ω erfüllt ist.

§ 2.

Lösung des Problems zu entscheiden, ob eine gegebene Aussage des Gruppenkalkuls beweisbar ist oder nicht.

Der logische Gruppenkalkul[1] hat mit gewissen Dingen zu tun, die gewöhnlich ‚Gruppen' genannt werden. Zwischen diesen besteht bisweilen eine binäre Relation, die gewöhnlich ‚Subsumption' genannt wird; man sagt, dass eine Gruppe a in einer anderen b ‚enthalten' ist. Ich will im folgenden das Bestehen dieser binären Relation zwischen a und b einfach (ab) schreiben. Weiter kommen zwischen den Gruppen zwei ternäre Relationen vor, indem eine Gruppe der gemeinsame Bestandteil zweier anderen, die grösste auf einmal in den beiden anderen enthaltene Gruppe, sein kann, oder eine Gruppe kann die kleinste auf einmal zwei andere enthaltende sein. Das Bestehen dieser Relationen zwischen drei Gruppen bezeichne ich im folgenden bez. als $\widehat{abc}$ und $\underset{\smile}{abc}$. Die Axiome, welche dem Gruppenkalkul zu Grunde liegen, sind dann die folgenden:

I. Für jedes x gilt (xx).

II. Aus (xy) in Verbindung mit (yz) folgt (xz).

$\mathrm{III}_{\times}$. Aus $\widehat{xyz}$ folgen (zx) und (zy)

$\mathrm{IV}_{\times}$. Aus $\widehat{xyz}$ in Verbindung mit (ux) und (uy) folgt (uz).

$\mathrm{V}_{\times}$. Aus $\widehat{xyz}$ in Verbindung mit (xx'), $(x'x)$, (yy'), $(y'y)$, (zz') und $(z'z)$ folgt $\widehat{x'y'z'}$.

$\mathrm{VI}_{\times}$. Für beliebige x und y gibt es ein z, sodass $\widehat{xyz}$ besteht.

III_{+}. Aus $\underset{\smile}{xyz}$ folgen (xz) und (yz).

IV_{+}. Aus $\underset{\smile}{xyz}$ in Verbindung mit (xu) und (yu) folgt (zu).

V_{+}. Aus $\underset{\smile}{xyz}$ in Verbindung mit (xx'), $(x'x)$, (yy'), $(y'y)$, (zz') und $(z'z)$ folgt $\underset{\smile}{x'y'z'}$.

VI_{+}. Für beliebige x und y gibt es ein z, sodass $\underset{\smile}{xyz}$ besteht.

Nach der in Schröders Algebra der Logik angewandten Bezeichnungsweise wird $a \leqq b, c = ab$, $c = a + b$ statt (ab), $\widehat{abc}$, $\underset{\smile}{abc}$ geschrieben.

Die Gültigkeit eines Satzes innerhalb der Algebra, welche auf dieser axiomatischen Grundlage aufgebaut werden kann, besteht nun immer einfach darin, dass man folgendes zeigen kann: Wenn diese oder jene Paare und Tripel (xy), $\widehat{xyz}$ usw. gegeben sind, können aus diesen durch eventuel wiederholte und kombinierte Anwendung der Axiome diese oder jene Paare und Tripel erzeugt werden. In der Tat haben *die aufgestellten Axiome den Sinn von Erzeugungsprinzipien*, wobei nach den Axiomen I—V neue Paare und Tripel aus gewissen ursprünglichen Symbolen (Buchstaben) erzeugt werden, während nach den Axiomen VI neue Tripel eingeführt werden, in welchen aber auch neueingeführte Buchstaben auftreten. *Dies ist eine rein kombinatorische Auffassung der Deduktion,*

[1] Siehe E. Schröder: Algebra der Logik, B. 1, p. 628—632.

auf die ich Gewicht legen möchte, da sie bei logischen Untersuchungen besonders nützlich erscheint. Dass in der Tat jeder Beweis nichts anderes ist als eine Erzeugung von Paaren und Tripeln werde ich durch einige Beispiele erläutern.

Nehmen wir z. B. den Satz $ab + ac \equiv a(b + c)$ in der Schröderschen Terminologie. Er besteht i folgendem:

Aus $\widehat{abd}$ in Verbindung mit $\widehat{ace}$, $\underset{\smile}{bcf}$, $\underset{\smile}{deg}$ und $\widehat{afh}$ folgt das Paar (gh). Beweis: Aus $\underset{\smile}{bcf}$ folgt nach III_+ das Paar (bf). Aus $\widehat{abd}$ folgen sowohl (da) wie (db) nach $\mathrm{III}_\times$. Aus (db) und (bf) folgt nach II (df). Aus (da) und (df) in Verbindung mit $\widehat{afh}$ folgt nach $\mathrm{VI}_\times$ (dh). Aus $\underset{\smile}{bcf}$ folgt kraft III_+ das Paar (cf). Aus $\widehat{ace}$ folgen nach $\mathrm{III}_\times$ (ea) und (ec). Aus (ec) und (ef) folgt nach II (ef). Aus (ea) in Verbindung mit (ef) und $\widehat{afh}$ folgt nach $\mathrm{VI}_\times$ (eh). Aus (dh) in Verbindung mit (eh) und $\underset{\smile}{deg}$ folgt nach IV_+ endlich (gh).

Betrachten wir auch den Satz $(a + b) + c \equiv a + (b + c)$ in Schröderscher Bezeichnung. Er besteht darin, dass das Paar (de) aus dem Bestehen der vier Tripel $\underset{\smile}{ab\alpha}$ $\underset{\smile}{\alpha cd}$ $\underset{\smile}{bc\beta}$ $\underset{\smile}{a\beta e}$ folgt.

Beweis: Aus $\underset{\smile}{bc\beta}$ folgt nach III_+ $(b\beta)$ und aus $\underset{\smile}{a\beta e}$ in derselben Weise (βe). Nach II bekommen wir aus den Paaren $(b\beta)$ und (βe) das Paar (be). Aus $\underset{\smile}{a\beta e}$ kann aber nach III_+ auch (ae) gebildet werden. Aus (ae), (be) und $\underset{\smile}{ab\alpha}$ kann nach IV_+ (αe) gebildet werden. Aus $\underset{\smile}{bc\beta}$ kann man nach III_+ $(c\beta)$ bilden, was mit (βe) kraft II (ce) gibt. Aus (αe), (ce) und $\underset{\smile}{\alpha cd}$ in Vereinigung kann endlich kraft IV_+ (de) gebildet werden.

Bei diesen Beweisen kommen allein die Axiome I—V zur Anwendung. Axiom VI kommt aber immer zur Anwendung, wenn man einen Existenzsatz beweisen soll. So z. B. bei folgendem sehr einfachen Satze:

Wenn a, b, c gegeben sind, so gibt es immer ein d, sodass sowohl (ad) wie (bd) und (cd) stattfinden.

Beweis: Kraft VI_+ gibt es ein α solcher Beschaffenheit, dass $\underset{\smile}{ab\alpha}$ vorkommt, und ausserdem ein d, so dass $\underset{\smile}{\alpha cd}$ vorkommt. Aus $\underset{\smile}{ab\alpha}$ können nach III_+ die Paare $(a\alpha)$ und $(b\alpha)$ und aus $\underset{\smile}{\alpha cd}$ in gleicher Weise (αd) und (cd) gebildet werden. Aus $(a\alpha)$ und (αd) können wir nach II ad bilden. Ebenso folgt (bd) aus $(b\alpha)$ in Verbindung mit (αd). Also haben wir sowohl (ad) wie (bd) und (cd), wodurch der Satz bewiesen ist.

Man kann nun die Frage stellen, ob jemals auch die Axiome $\mathrm{VI}_\times$ und VI_+ bei Beweisen für Sätze der ersteren Art, die also *nicht* von der *Existenz* von ‚Gruppen' handeln, zur Anwendung kommen werden. À priori ist ja dies sehr wohl denkbar. Man könnte sich folgendes vorstellen: Wenn gewisse Paare und Tripel, aus den ursprünglichen Symbolen $a_1\, a_2 \ldots a_n$ gebildet, gegeben sind, und neue Tripel mit neuen ‚ursprüng-

lichen Symbolen $b_1\ b_2 \ldots$ eingeführt werden, dann nachher durch Anwendung der Axiome I—V mehr Paare und Tripel, aus $a_1\ a_2 \ldots a_n$ gebildet, ableitbar wären, als man durch ausschliessliche Anwendung der Axiome I—V bekommen könnte. Bei den meisten anderen Axiomensystemen wird auch ein solches Verhältnis in hohem Grade stattfinden; es ist aber bemerkenswert, dass es hier durchaus nicht so ist, was die Ableitbarkeit der *Paare* betrifft. In der Tat gilt folgender Satz, den ich beweisen soll.

Satz. *Es sei ein System S von Paaren und Tripeln, aus den Symbolen $a_1 \ldots a_n$ gebildet, gegeben. Es sei Σ das System, das alle diejenigen Paare und Tripel enthält, die überhaupt mit Hülfe der Axiome I—V aus den Paaren und Tripeln in S abgeleitet werden können. Man führe nun durch eventuell wiederholte Anwendung von VI neue Tripel ein, in welchen die neuen Symbole $b_1\ b_2 \ldots$ vorkommen, und es sei Σ' das System aller Paare und Tripel, die dann nachher mit Hülfe von I—V gebildet werden können. Dann enthält Σ' keine anderen Paare aus $a_1\ a_2 \ldots a_n$ gebildet als die schon in Σ vorkommenden.*

Ich will diesen Satz nicht sofort beweisen, sondern mache zuerst einige Vorbereitungen. Nehmen wir an, wir haben ein System S von Paaren und Tripeln, für welche die Axiome I—V, aber nicht VI, gültig sind. Ich füge jetzt kraft $\mathrm{VI}_\times$ für zwei Symbole a_1 und a_2 ein α hinzu, sodass $\widehat{a_1\, a_2\, \alpha}$ stattfindet. Ausserdem werden folgende Paare zu S hinzugefügt:

1) Das Paar $(\alpha\, \alpha)$.
2) Alle Paare $(\alpha\, a_r)$, wo a_r so beschaffen ist, dass wenn $(a_s\, a_1)$ und $(a_s\, a_2)$ auf einmal in S vorkommen, so kommt auch immer $(a_s\, a_r)$ in S vor.
3) Alle Paare $(a_n\, \alpha)$, wo a_n so beschaffen ist, dass $(a_n\, a_1)$ und $(a_n\, a_2)$ in S vorkommen.

Hülfssatz 1. Es sei S' das System, das aus S durch Hinzufügung des Tripels $\widehat{a_1\, a_2\, \alpha}$ und der unter 1), 2) og 3) erwähnten Paare entsteht. Dann sind die Axiome I—IV für S' gültig.

Beweis: Dass das Axiom I für S' gültig ist, sieht man sofort; denn jedes Symbol, das in einem der Paare oder Tripel in S' vorkommt, ist entweder eines der Symbole $a_1 \ldots a_n$ oder es ist das neue Symbol α. Nun kommen die Paare $(a_r\, a_r)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ der Annahme nach alle in S vor und also auch in S'. Ausserdem kommt $(\alpha\, \alpha)$ in S' vor nach 1).

Dass das Axiom II für S' wahr ist, sieht man wie folgt. Zwei Paare in S, die von der Form $(a_r\, a_s)$ und $(a_s\, a_t)$ sind, geben nach dem für S gültigen Axiom II das Paar $(a_r\, a_t)$, das also in S und folglich auch in S' vorkommt. — Nehmen wie ein Paar $(a_r\, a_{r'})$ in S und ein Paar der Form $\alpha\, a_r)$ in S', so soll immer $(a_s\, a_r)$ in S vorkommen, wenn $(a_s\, a_1)$ und $(a_s\, a_2)$

in S vorkommen, und daraus folgt nach II, wenn $(a_s a_1)$ und $(a_s a_2)$ beide in S vorkommen, dass $(a_s a_{r'}) \varepsilon S$[1] sein muss. Da also immer $(a_s a_{r'}) \varepsilon S$ ist, so oft sowohl $(a_s a_1)$ wie $(a_s a_2) \varepsilon S$ sind, so soll nach 2) auch $(\alpha a_{r'}) \varepsilon S'$ sein. — Nehmen wir ein Paar $(a_r a_s)$ in S und ein Paar $(a_s \alpha)$ in S', so müssen $(a_s a_1)$ und $(a_s a_2)$ beide in S vorkommen, woraus folgt, dass sowohl $(a_r a_1) \varepsilon S$ wie $(a_r a_2) \varepsilon S$ und also nach 3) $(a_r \alpha) \varepsilon S'$. — Endlich betrachten wir zwei Paare in S' der Form $(a_r \alpha)$ und (αa_s). Wenn $(a_r \alpha) \varepsilon S'$ ist, so sind nach 3) sowohl $(a_r a_1)$ wie $(a_r a_2) \varepsilon S$, und da (αa_s) soll $\varepsilon S'$ sein, so folgt daraus wieder nach 2), dass $(a_r a_s) \varepsilon S$ ist und also auch $\varepsilon S'$. — Den Fall, da eines oder beide Paare von der Form $(\alpha \alpha)$ sind, brauchen wir augenscheinlich nicht zu berücksichtigen, da es ja dann trivial ist, dass II erfüllt ist. — Es gilt also II auch für das System S'.

Werden die Axiome III auf die Tripel $\widehat{a_m a_n a_p}$ oder $\underset{\smile}{a_m a_n a_p}$ in S angewandt, so erhalten wir der Annahme nach Paare, die schon wieder zu S gehören. Wird $\mathrm{III}_\times$ auf das neue Tripel $\widehat{a_1 a_2 \alpha}$ angewandt, so bekommen wir die Paare (αa_1) und (αa_2). Diese sind aber von der unter 2) erwähnten Form und gehören also zu S'. Also ist III für S' gültig.

Haben wir $(a_q a_m) \varepsilon S$, $(a_q a_n) \varepsilon S$ und $\widehat{a_m a_n a_p} \varepsilon S$, so muss auch $(a_q a_p) \varepsilon S$ sein, da $\mathrm{IV}_\times$ für S gültig sein soll. Nun können aber innerhalb S' die Paare (αa_m) und (αa_n) vorkommen; dann folgt aus $(a_s a_1)$ und $(a_s a_2) \varepsilon S$ sowohl $(a_s a_m)$ wie $(a_s a_n) \varepsilon S$. Da $\mathrm{IV}_\times$ für S gilt, so folgt, dass $(a_s a_p) \varepsilon S$, so oft $(a_s a_1)$ und $(a_s a_2) \varepsilon S$, woraus wieder $(\alpha a_p) \varepsilon S'$ folgt (nach 2)). — Es seien nun die Paare $(a_r a_1)$ und $(a_r a_2)$ in S und das Tripel $\widehat{a_1 a_2 \alpha}$ in S' gegeben. Nach 3) ist dann $(a_r \alpha) \varepsilon S'$. — Dass aus dem Vorkommen von (αa_1), (αa_2) und $\widehat{a_1 a_2 \alpha}$ in S' auch $(\alpha \alpha) \varepsilon S'$ folgt ist sicher; denn nach 1) kommt unter allen Umständen $(\alpha \alpha)$ in S' vor. — Es gilt also auch $\mathrm{IV}_\times$ für S'.

Wenn $\underset{\smile}{a_m a_n a_p}$, $(a_m a_q)$ und $(a_n a_q)$ alle εS sind, so haben wir nach dem für S gültigen Axiom IV_+ $(a_p a_q) \varepsilon S$ und also à fortiori $\varepsilon S'$. Wenn $\underset{\smile}{a_m a_n a_p} \varepsilon S$ und $(a_m \alpha)$ und $(a_n \alpha)$ beide $\varepsilon S'$, so haben wir $(a_m a_1)$, $(a_m a_2)$, $(a_n a_1)$ und $(a_n a_2)$ alle εS, sodass sowohl $(a_p a_1)$ wie $(a_p a_2) \varepsilon S$, da IV_+ für S gilt. Dann soll aber nach 3) $(a_p \alpha) \varepsilon S$ sein. — Es gilt also auch IV_+ für S'.

Hierdurch ist also die Gültigkeit der Axiome I—IV für S' bewiesen, was wir auch passend so ausdrücken können, dass S' in Bezug auf diese Axiome (Erzeugungsprinzipien) abgeschlossen ist.

Weiter kann folgender Satz bewiesen werden:

[1] Ich schreibe von jetzt an oft $a \varepsilon S$ als kürzeren Ausdruck dafür, dass a (das hier immer ein Paar oder ein Tripel ist) in S vorkommt (a Element von S).

Hülfssatz 2. Ist Σ ein System von Paaren und Tripeln, das in Bezug auf die Axiome I—IV abgeschlossen ist, so bekommt man durch Hinzufügung aller Tripel, die durch (nicht wiederholte) Anwendung von V daraus ableitbar sind, ein in Bezug auf die Axiome I—V abgeschlossenes System Σ'.

Beweis: Da Σ' nicht andere Paare enthält als die schon in Σ auftretenden, so sind erstens die Axiome I und II für Σ' gültig.

Nimmt man ein Tripel $\widehat{abc}$ oder $\underset{\smile}{abc}$, das zu Σ gehört, so gehören (ca) und (cb) bez. (ac) und (bc) schon zu Σ. Ist $\widehat{\alpha\beta\gamma}$ bez. $\underset{\smile}{\alpha\beta\gamma}$ eines der neuen Tripel, so sollen drei Symbole a, b, c vorkommen, sodass $\widehat{abc}$ bez. $\underset{\smile}{abc}$ ε Σ ist, während ausserdem $(a\alpha)$ (αa) $(b\beta)$ (βb) $(c\gamma)$ (γc) alle in Σ auftreten. Dann kommen die Paare (ca) und (cb) bez. (ac) und (bc) in Σ vor. Da Σ in Bezug auf II abgeschlossen ist, so treten sicher $(\gamma\alpha)$ und $(\gamma\beta)$ bez. $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ in Σ auf. Also gelten die Axiome III für Σ'.

Ist $\widehat{abc}$ oder $\underset{\smile}{abc}$ ein Tripel in Σ während (da) und (db) bez. (ad) und (bd) Paare in Σ' und also auch in Σ sind, so ist (dc) bez. (cd) ε Σ. Ist $\widehat{\alpha\beta\gamma}$ bez. $\underset{\smile}{\alpha\beta\gamma}$ eines der in Σ' aber nicht in Σ vorkommenden Tripel, so gibt es jedenfalls drei Symbole a, b, c, sodass die Paare $(a\alpha)$ (αa) (βb) $(b\beta)$ (γc) $(c\gamma)$ alle in Σ auftreten, währen $\widehat{abc}$ bez. $\underset{\smile}{abc}$ zu Σ gehört. Sind nun $(d\alpha)$ und $(d\beta)$ bez. (αd) und (βd) Paare in Σ' und folglich auch in Σ, so kommen (da) und (db) bez. (ad) und (bd) in Σ vor, also (dc) bez. (cd) $\varepsilon\,\Sigma$, woraus wieder $(d\gamma)$ bez. (γd) ε Σ. Es ist also Σ' in Bezug auf die Axiome IV abgeschlossen.

Wenn $\widehat{abc}$ ε Σ bez. $\underset{\smile}{abc}$ ε Σ und weiter $(a\alpha)$ (αa) $(b\beta)$ (βb) $(c\gamma)$ (γc) alle ε Σ, so ist $\widehat{\alpha\beta\gamma}$ ε Σ' bez. $\underset{\smile}{\alpha\beta\gamma}$ ε Σ'. Wenn $\widehat{\alpha\beta\gamma}$ oder $\underset{\smile}{\alpha\beta\gamma}$ zu Σ' aber nicht zu Σ gehört, so gibt es drei Symbole a, b, c, sodass die Paare $(a\alpha)$ (αa) $(b\beta)$ (βb) $(c\gamma)$ (γc) alle in Σ vorkommen, während ausserden $\widehat{abc}$ bez. $\underset{\smile}{abc}$ ε Σ ist. Kommen nun auch die Paare $(\alpha\alpha')$ $(\alpha'\alpha)$ $(\beta\beta')$ $(\beta'\beta)$ $(\gamma\gamma')$ $(\gamma'\gamma)$ alle in Σ' und also auch in Σ vor, so gehören die Paare $(a\alpha')$ $(\alpha' a)$ $(b\beta')$ $(\beta' b)$ $(c\gamma')$ $(\gamma' c)$ alle zu Σ, und also muss $\widehat{\alpha'\beta'\gamma'}$ bez. $\underset{\smile}{\alpha'\beta'\gamma'}$ in Σ' vorkommen. Die Axiome V sind also auch für Σ' gültig.

Wendet man nun diesen Hülfssatz 2 auf das System S' im vorhergehenden Hülfssatz an (d. h. setzt man $\Sigma = S'$), so bekommt man folgenden Satz:

Hat man ein System S, für das die Axiome I—V gültig sind, und man in Übereinstimmung mit Axiom $\mathrm{VI}_\times$ ein Tripel $\widehat{a_1 a_2 \alpha}$ hinzufügt, wo α ein neues Symbol ist, so bekommt man durch hinreichend (endlich) viele mal die Axiome I—V anzuwenden ein System S_1, für das die Axiome I—V wieder gültig sind, und S_1 enthält nicht andere Paare von den alten Symbolen gebildet als die schon in S auftretenden.

Da ein genau gleicher Satz beweisbar ist, wenn man das Axiom VI_+ statt $VI_\times$ nimmt, so folgt hieraus weiter:

Hat man ein in Bezug auf die Axiome I—V abgeschlossenes System S, und die Axiome VI eventuell wiederholt angewandt werden, wobei man nachher durch hinreichend viele Anwendungen von I—V ein System S′ bekommt, das wieder in Bezug auf I—V abgeschlossen ist, so enthält S′ keine anderen Paare, von den in den Paaren und Tripeln von S auftretenden Buchstaben gebildet, als die schon in S vorkommenden Paare.

Hierdurch ist die Seite 18 aufgestellte Behauptung allgemein bewiesen.

Wünscht man also zu finden, ob ein Paar oder gewisse Paare aus gewissen gegebenen Paaren oder Tripeln kraft der Axiome I—VI folgen, so kann man die Axiome VI ausser Betracht lassen; man braucht nur zu untersuchen, ob es (sie) mit Hülfe der Axiome I—V allein ableitbar ist (sind). *Da es ausserdem nur eine endliche Zahl von Paaren und Tripeln gibt, die aus einer gegebenen endlichen Zahl von solchen nach den Axiomen I—V ableitbar sind, so ist hierdurch ein Verfahren gefunden durch eine endliche Arbeit zu entscheiden, ob eine in der Symbolik des Gruppenkalkuls darstellbare Aussage allgemein gültig ist oder nicht,* wenn diese Aussage nur von folgendem handelt: Wenn diese oder jene Paare und Tripel gegeben sind, dann sind auch diese oder jene anderen Paare und Tripel derselben ursprünglichen Symbole vorhanden. Dass auch die Frage, ob ein oder mehrere Tripel aus gewissen gegebenen Paaren und Tripeln folgen, entscheidbar ist, ist ganz klar, weil sich eine solche Frage in eine völlig gleichwertige über die Ableitbarkeit eines oder mehrere Paare umschreiben lässt. Um nämlich zu untersuchen, ob ein Tripel $\widehat{abc}$ aus einem System S von Paaren und Tripeln ableitbar ist, können wir ein Symbol a und das Tripel $\widehat{aba}$ einführen, und es sei S' das System, das aus S durch Hinzufügung von $\widehat{aba}$ entsteht. Es ist dann für die Ableitbarkeit des Tripels $\widehat{abc}$ von dem System S mit Hülfe von I—VI notwendig und hinreichend, dass die Paare (ca) und (ac) aus S' mit Hülfe derselben Axiome gebildet werden können.

Ich gebe hier einige Beispiele.

Beispiel 1. Dass die Subsumtion $b \mathrel{\underline{\in}} a$ nicht allgemein aus der umgekehrten Subsumtion $a \mathrel{\underline{\in}} b$ folgt, kann wie folgt gesehen werden. Dass $a \mathrel{\underline{\in}} b$ gegeben ist, bedeutet in unserer Sprache, dass das Paar (ab) gegeben ist. Da hier zwei ursprüngliche Symbole a und b vorkommen, so können nach I die Paare (aa) und (bb) gebildet werden. Dann bilden aber schon die drei Paare (aa) (ab) (bb) in Vereinigung ein in Bezug auf die Axiome I—V abgeschlossenes System. Da das Paar (ba) in diesem System nicht vorkommt, so ist dadurch nach den obigen Ausführungen

bewiesen, dass (ba) nicht aus (ab) folgt, d. h. die Aussage »wenn $a \mathrel{=\!\!\!\in} b$, so ist $b \mathrel{=\!\!\!\in} a$« ist nicht im Gruppenkalkul gültig; ein solcher Satz besteht nicht oder m. a. W. ist nicht beweisbar.

Beispiel 2. Es sei zu beweisen, dass die Subsumtion $a(b+c) \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac$ (in Schröderscher Bezeichnung), die ja innerhalb des Klassenkalkuls allgemein gültig ist, im Gruppenkalkul nicht allgemein gültig ist. In unsere Sprache übersetzt bedeutet diese Aufgabe folgendes: Es sind die Tripel $\widehat{abd}$, $\widehat{ace}$, $\underbrace{bcf}$, $\underbrace{deg}$ und $\widehat{afh}$ gegeben. Folgt daraus nach den Axiomen I—VI das Paar (hg)? Um dies zu untersuchen haben wir dann bloss die Axiome I—V so lange anzuwenden, bis ein in Bezug auf diese Axiome geschlossenes System entsteht. Das Axiom I gibt uns die Paare $(aa)\,(bb)\,(cc)\,(dd)\,(ee)\,(ff)\,(gg)\,(hh)$. Die Axiome III geben uns $(da)\,(db)\,(ea)\,(ec)\,(bf)\,(cf)\,(dg)\,(eg)\,(ha)\,(hf)$, und dann bekommen wir nach II weiter (df) und (ef) und kraft IV_+ auch (gf). Dann können aber nicht mehr Paare oder Tripel aus den 5 gegebenen Tripeln mit Hülfe von I—V gebildet werden. Unter den erhaltenen Paaren kommt (hg) nicht vor. Hierdurch ist die Nichtableitbarkeit von (hg) aus den 5 gegebenen Tripeln nach den Axiomen I—VI bewiesen oder m. a. W. die Nichtbeweisbarkeit des sogenannten distributiven Gesetzes $a(b+c) \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac$ innerhalb des Gruppenkalkuls. (Siehe Schröder, Algebra der Logik, B. 1, p. 642 und 686).

Beispiel 3. Es sei zu beweisen, dass die im Klassenkalkul allgemeingültige Subsumtion $(a+b)(a+c)(b+c) \mathrel{=\!\!\!\in} ab + ac + bc$ im Gruppenkalkul nicht beweisbar ist. Wir haben dann zu zeigen: Wenn die Tripel

$$\underbrace{ab\gamma},\ \underbrace{ac\beta},\ \underbrace{bc\alpha},\ \widehat{ab\gamma'},\ \widehat{ac\beta'},\ \widehat{bc\alpha'},\ \widehat{\alpha\beta d},\ \widehat{d\gamma e},\ \underbrace{\alpha'\beta'd'},\ \underbrace{d'\gamma'e'}$$

gegeben sind, ist daraus nicht das Paar (ee') mit Hülfe der Axiome I—V ableitbar. Nach dem angegebenen Verfahren brauchen wir aber bloss zu beweisen, dass (ee') nicht durch Anwendungen von I—V allein ableitbar ist. Wir bringen also I—V so lange in Anwendung, dass ein in Bezug auf I—V geschlossenes System entsteht, indem wir von den 10 gegebenen Tripeln ausgehen. Wir bekommen nun zuerst mit Hülfe von I alle von den 13 Symbolen $a, b, \ldots$ gebildeten ‚Selbst' Paare $(aa), (bb) \ldots$. Kraft III bekommen wir die Paare

$$(a\gamma)\,(b\gamma)\,(a\beta)\,(c\beta)\,(b\alpha)\,(c\alpha)\,(\gamma'a)\,(\gamma'b)\,(\beta'a)\,(\beta'c)\,(\alpha'b)\,(\alpha'c)\,(d\alpha)\,(d\beta)\,(e\gamma)\,(ed)\,(\alpha'd')$$
$$(\beta'd')\,(\gamma'e')\,(d'e')$$

und durch Anwendung von II

$$(e\alpha)\,(e\beta)\,(\alpha'e')\,(\beta'e')\,(\alpha'\alpha)\,(\alpha'\beta)\,(\alpha'\gamma)\,(\beta'\alpha)\,(\beta'\beta)\,(\beta'\gamma)\,(\gamma'\alpha)\,(\gamma'\beta)\,(\gamma'\gamma)$$

und weiter durch IV

$$(cd)\,(d'c)\,(\alpha'd)\,(\beta'd)\,(\gamma'd)\,(\alpha'e)\,(\beta'e)\,(\gamma'e)\,(d'\alpha)\,(d'\beta)\,(d'\gamma)\,(d'd)\,(d'e)\,(e'\alpha)\,(e'\beta)$$
$$(e'\gamma)\,(e'd)\,(e'e),$$

wodurch das System in Bezug auf I—V abgeschlossen ist. Da das Paar (ee') nicht auftritt, so ist also hierdurch die Nichtbeweisbarkeit des Satzes $(a+b)(a+c)(b+c) \not\equiv ab+ac+bc$ innerhalb des Gruppenkalkuls bewiesen.

Dass wir wirklich mit Hülfe des in diesem Paragraphen angegebenen Verfahrens imstande sind zu entscheiden, ob eine beliebig gegebene Aussage im Gruppenkalkul gültig ist oder nicht, falls diese Aussage aus Elementaraussagen, d. h. Relativkoeffizienten oder m. a. W. Paaren und Tripeln (xy), $\widehat{xyz}$, $\underset{\smile}{xyz}$, durch endlich viele Anwendungen von Konjunktion, Disjunktion, Negation und Produktion gebildet ist — also unter Ausschluss der Summation — lässt sich in folgenden Weise zeigen.

Jede solche Aussage kann in der Form

$$(1) \qquad \underset{x_1}{\Pi}\ \underset{x_2}{\Pi} \ldots \underset{x_n}{\Pi}\ U(x_1, \ldots, x_n)$$

geschrieben werden, wo $U(x_1, \ldots, x_n)$ eine Aussage ist, die aus Paaren und Tripeln der Formen (xy), $\widehat{xyz}$ $\underset{\smile}{xyz}$[1] durch endlich viele Anwendungen von Konjunktion, Disjunktion und Negation aufgebaut ist. Jede solche Aussage U lässt sich aber wieder als ein Produkt (Konjunktion) von endlich vielen Aussagen $E_1, E_2, \ldots$ schreiben, wo jede der Aussagen E_r aus Elementaraussagen mit Hülfe von Negation und Disjunktionen allein gebildet ist. Die gegebene Aussage (1) wird dann mit der gleichzeitigen Gültigkeit aller Aussagen der Form

$$(2) \qquad \underset{x_1}{\Pi}\ \underset{x_2}{\Pi} \ldots \underset{x_n}{\Pi}\ E_r(x_1, \ldots, x_n)$$

gleichbedeutend sein. Statt zu untersuchen, ob (1) allgemein gültig ist, braucht man also nur zu untersuchen, ob (2) für jeden Wert von r gilt. Es sei nun

$$(3) \qquad \underset{x_1}{\Pi} \ldots \underset{x_n}{\Pi}\ E(x_1, \ldots, x_n)$$

eine dieser Aussagen (2). E lässt sich dann als eine Summe (Disjunktion, Alternative) endlich vieler Glieder schreiben, wo jedes Glied entweder eine negierte oder eine nicht-negierte Elementaraussage ist. Es seien $e_1, e_2, \ldots, e_p$ die in E auftretenden nicht negierten Elementaraussagen, während $\bar{e}_{p+1}, \bar{e}_{p+2}, \ldots, \bar{e}_{p+q}$ die negierten sind, sodass also $e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}$ auch nicht-negierte Elementaraussagen sind. Dann bedeutet die ganze Aussage E nur, dass entweder e_1 oder e_2 oder ... oder e_p gilt, falls e_{p+1}, e_{p+2} usw. bis e_{p+q} stattfinden. E hat also die Bedeutung einer Implikation; sie bedeutet in unserer kombinatorischen Sprache, dass falls diese oder jene Paare und Tripel vorhanden sind, mindestens eines gewisser Paare und Tripel vorhanden sind, und dass dies für beliebige Wahl der in den gegebenen Paaren und Tripeln auftretenden ursprünglichen Symbole gelten soll. Dies bedeutet wieder nur, dass mindestens eines der Paare und

[1] Diese Paare und Tripel nenne ich Elementaraussagen.

Tripel $e_1 \ldots e_p$ mit Hülfe der Axiome I—VI aus den Paaren und Tripeln $e_{p+1} \ldots, e_{p+q}$ ableitbar sein soll. Das kann aber nach dem oben angegebenen Verfahren immer entschieden werden. Man braucht ja nur zu untersuchen, ob erstens e_1 aus $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_{p+q}$ folgt, dann ob e_2 aus $e_{p+1} \ldots e_{p+q}$ folgt usw. bis ob e_p aus $e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}$ folgt.

Es gibt aber einen speziellen Fall, der besonders betrachtet werden muss, nämlich wenn alle in E auftretenden Elementaraussagen negiert sind, also wenn die Zahl $p = 0$ ist. Es ist aber klar, dass eine solche Aussage nie eine allgemeingültige Formel des Gruppenkalkuls sein kann. Dies rührt davon her, dass die aufgestellten Axiome sämmtlich in dem Sinne *positiv* sind, dass sie alle davon reden, dass diese oder jene Paare oder Tripel existieren sollen oder kraft der Existenz von anderen existieren sollen, während sie nie aussagen, dass Paare oder Tripel nicht existieren sollen, oder dass aus der Existenz von gewissen Paaren oder Tripeln die Nichtexistenz von anderen folgten. Man kann deshalb immer Paare und Tripel aus gewissen Symbolen gebildet nach Belieben einführen und nachher die Axiome I—VI beliebig oft anwenden, ohne dass man dadurch jemals zu einem Wiederspruch kommen würde. Es kann deshalb eine Aussage der Form

$$\underset{x_1}{\Pi} \ldots \underset{x_n}{\Pi} (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \ldots + \bar{e}_q),$$

wo $e_1, e_2, \ldots, e_q$ nicht-negierte Elementaraussagen über $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, im Gruppenkalkul nicht beweisbar sein.

§ 3.

Ein Verfahren zu entscheiden, ob ein gegebener deskriptiver elementargeometrischer Satz aus den Verknüpfungsaxiomen der Ebene folge oder nicht.

In der elementaren Geometrie der Ebene hat man mit zweierlei Objekten zu tun, *Punkte* und *gerade Linien*. Ich will die ersteren mit grossen[1], die letzteren mit kleinen Buchstaben bezeichnen. Dass zwei Punkte A und B zusammenfallen bezeichne ich dadurch, dass ich (AB) oder (BA) schreibe. (Diese ‚Koincidenz'-Paare sollen also ungeordnete sein). Ebenso soll (ab) oder (ba) bedeuten, dass die Linien a und b zusammenfallen. Weiter soll (Aa) oder auch (aA) bedeuten, dass der Punkt A auf der Linie a liegt. Dann gelten in der Ebene folgende Axiome:

$\mathrm{I_p}$. Für jedes A gilt (AA).	$\mathrm{I_l}$. Für jedes a gilt aa.
$\mathrm{II_p}$. Aus (AB) mit (BC) folgt (AC).	$\mathrm{II_l}$. Aus (ab) mit (bc) folgt (ac).
$\mathrm{III_p}$. Aus (AB) mit (Ac) folgt (Bc).	$\mathrm{III_l}$. Aus (ab) mit (Ca) folgt (Cb).

[1] Der grosse Buchstabe S allerdings wird im folgenden zur Bezeichnung von *Systemen* gebraucht. Das wird wohl kaum zu Missverständnissen Anlass geben.

IV. Aus den Paaren $(Aa)(Ba)(Ab)(Bb)$ folgt entweder (AB) oder (ab).

V_p. Für jedes A und jedes B gibt es ein c, sodass sowohl (Ac) wie (Bc) stattfinden.

V_1. Für jedes a und jedes b gibt es ein C, sodass sowohl (aC) wie (bC) stattfinden.

Hier kann folgender Satz bewiesen werden:

Satz 1. *Es sei S ein System von Paaren, das in Bezug auf die Axiome I—IV, aber nicht in Bezug auf V_p, abgeschlossen ist. Weiter seien P und Q zwei Symbole, die in den Paaren von S auftreten, aber so, dass (PQ) nicht ε S ist. Wir bilden ein umfassenderes System S' durch Hinzufügung der folgenden Paare:*

1) *(rr), wo r ein neues, d. h. in den Paaren von S nicht auftretendes, Symbol ist.*
2) *$(P'r)$, sooft $(P'P)$ ε S, und $(Q'r)$, sooft $(Q'Q)$ ε S ist.*
3) *(rr'), sooft $(PP')(Q'Q)(P'r')(Q'r')$ alle ε S sind.*
4) *(Cr), wenn die Paare $(Cr')(PP')(QQ')(P'r')(Q'r')$ alle in S auftreten.*

Dann ist S' wieder in Bezug auf I—IV abgeschlossen.

Beweis: Dass die Axiome I für S' gelten, sieht man unmittelbar. Dass II_p gilt ist auch ganz klar, da S' keine anderen Punktpaare enthält als die schon in S vorkommenden. Dass II_1 für S' gültig ist, lässt sich wie folgt beweisen. — Sind (ab) und (bc) beide ε S, so ist auch (ac) ε S. Ist (ab) ε S, aber (bc) ε $S'-S$ ($S'-S$ soll der Rest von S' bedeuten, der übrig bleibt, wenn S entfernt wird), so muss (bc) von der Form $(r'r)$ sein, wo r' ein solcher Symbol ist, dass $(P'P)(Q'Q)(P'r')(Q'r')$ alle ε S sind. Dann ist (ab) von der Form (ar') und folglich kommen auch die Paare $(P'a)$ und $(Q'a)$ in S vor, da nämlich III_1 für S gilt. Dann ist aber nach 3) auch (ar) ε S'. Wenn (ab) ε $S'-S$ und (bc) ε S ist, geht es natürlich ganz ebenso; im Grunde ist das gar kein neuer Fall, da die Paare ungeordnet sind. — Es bleibt also nur der Fall (ab) ε $S'-S$ und (bc) ε $S'-S$. Diesen beiden Paare sind dann von der Form $(r'r)$, indem wir augenscheinlich von dem Falle absehen können, da eines oder beide Paare von der Form (rr) sind. Weiter können wir auch von dem Fall absehen, da b nicht das Symbol r ist, sodass a und c beide das Symbol r würden; denn (rr) gehört ja zu S' kraft 1). Die beiden Paare sind dann (r_1r), wobei $(PP_1)(QQ_1)(P_1r_1)(Q_1r_1)$ in S vorkommen, und (rr_2), wobei $(PP_2)(QQ_2)(P_2r_2)(Q_2r_2)$ zu S gehören. Dann müssen aber $P_1P_2)$ und (Q_1Q_2) zu S gehören und also auch $(P_1r_2)(Q_1r_2)(P_2r_1)$ und (Q_2r_1). Aus (P_1r_1), (Q_1r_1), (P_1r_2), (Q_1r_2) ε S folgt kraft IV, dass entweder (P_1Q_1) ε S oder (r_1r_2) ε S. (P_1Q_1) kann aber nicht zu S gehören; denn dann würde auch (PQ) ε S sein, was gegen die oben gemachte Voraussetzung streitet. Es ist also (r_1r_2) ε S. Hierdurch ist bewiesen, dass S' auch in Bezug auf II_1 abgeschlossen ist.

Ist $(AB) \varepsilon S$ und auch $(Ac) \varepsilon S$, so folgt $(Bc) \varepsilon S$. Ist $(AB) \varepsilon S$, aber $(Ac) \varepsilon S' - S$, so ist (Ac) entweder der Form $(P'r)$ wobei $(P'P) \varepsilon S$, oder der Form $(Q'r)$, wobei $(Q'Q) \varepsilon S$, oder der Form (Ar), wobei $(Ar') \varepsilon S$ und $(r'r) \varepsilon S'$ ist. In den zwei ersteren Fällen wird (AB) das Paar (BP') bez. (BQ'). Aus $(BP') \varepsilon S$ bez. $(BQ') \varepsilon S$ in Verbindung mit $(P'P) \varepsilon S$ bez. $(Q'Q) \varepsilon S$ folgt $(BP) \varepsilon S$ bez. $(BQ) \varepsilon S$. Hieraus folgt wieder, dass (Br) zu S' gehört. In dem letzten Falle muss $(Br') \varepsilon S$ sein, und da $(r'r) \varepsilon S'$ ist, so folgt nach 3) und 4) $(Br) \varepsilon S'$. Es ist also S' in Bezug auf $\mathrm{III_p}$ abgeschlossen.

Ist $(ab) \varepsilon S$, so ist $(Ca) \varepsilon S$, falls $(Ca) \varepsilon S'$, und dann kommt (Cb) schon in S vor. Ist $(ab) \varepsilon S' - S$, so ist (ab) entweder der Form (rr) — dann wird aber (Cb) dasselbe Paar wie (Ca) und gehört also sicher zu S' — oder der Form $(r'r)$, wobei es ein P' und ein Q' gibt, sodass die Paare $(P'P)$ $(Q'Q)$ $(P'r')$ $(Q'r')$ alle εS sind. Ausserdem ist dann (Ca) entweder der Form (Cr'), in welchen Falle (Cb), d. h. (Cr), kraft (4) zu S' gehört, oder der Form (Cr), wobei ein r'', ein P'' und ein Q'' vorkommen, sodass $(Cr'') \varepsilon S$ und auch (PP'') (QQ'') $(P''r'')$ $(Q''r'')$ alle εS sind. Daraus folgt, dass $(P'P'')$ und $(Q'Q'')$ beide εS sind, woraus wieder $(P'r')$ $(Q'r')$ $(P'r'')$ $(Q'r'')$ alle εS, woraus kraft IV folgt, dass $(r'r'') \varepsilon S$ ist. Sonst müsste nämlich $(P'Q') \varepsilon S$ sein, was bewirken würde, dass $(PQ) \varepsilon S$ wäre. Aus $(r'r'') \varepsilon S$ und $(Cr'') \varepsilon S$ folgt aber $(Cr') \varepsilon S$. Es ist also S' in Bezug auf $\mathrm{III_1}$ abgeschlossen.

Sind a und b Liniensymbole, die in den Paaren von S auftreten, so gehören die Paare (Aa) (Ba) (Ab) (Bb) alle zu S, und folglich kommt nach IV entweder (AB) oder (ab) in S vor. — Sind a und b beide das Symbol r, so kommt (ab), nämlich (rr), kraft 1) in S' vor. — Es bleibt der Fall zu betrachten, da z. B. $b\ r$ ist, während a eines der in den Paaren von S auftretenden Liniensymbole ist. Dann sind (Aa) und (Ba) beide εS während (Ab) und $(Bb) \varepsilon S' - S$ sind. Wir können zuerst den Fall betrachten, da entweder (AP) oder (AQ) und zugleich entweder (BP) oder (BQ) in S auftreten. Haben wir sowohl $(AP) \varepsilon S$ wie $(BP) \varepsilon S$, so folgt $(AB) \varepsilon S$. Ebenso wenn auf einmal (AQ) und $(BQ) \varepsilon S$ sind. Ist $(AP) \varepsilon S$ und $(BQ) \varepsilon S$, so folgt aus der Tatsache, dass (Aa) und $(Ba) \varepsilon S$ sind, dass (Pa) und $(Qa) \varepsilon S$ sind, woraus $(ar) \varepsilon S'$. Ebenso wenn (AQ) und $(BP) \varepsilon S$. — Dann betrachten wir den Fall, da für ein r' und ein r'' die Paare (Ar') und $(Br'') \varepsilon S$ und (rr') und $(rr'') \varepsilon S'$ sind. Wie schon oben nachgewiesen (bei dem Beweis für $\mathrm{II_1}$) kommt dann $(r'r'')$ in S vor, sodass auch $(Br') \varepsilon S$. Da nun alle vier Paare (Aa) (Ba) (Ar') (Br') in S vorkommen, so folgt entweder $(AB) \varepsilon S$ oder $(ar') \varepsilon S$. Kommt (ar') in S vor, so folgt, da $(r'r) \varepsilon S'$, kraft eines früheren Resonnements, dass auch $(ar) \varepsilon S'$ ist. — Endlich

müssen wir den Fall untersuchen, da ein Paar $(Ar') \varepsilon S$ und $(r'r) \varepsilon S'$ ist, während entweder (BP) oder (BQ) — wir können (BP) wählen — zu S gehört. Da $(r'r) \varepsilon S'$, so gibt es ein P' und ein Q', sodass $(P'P)$ $(Q'Q)$ $(P'r')$ $(Q'r')$ alle εS sind. Dann ist auch $(BP') \varepsilon S$ und also $(Br') \varepsilon S$. Aber aus dem Vorkommen von (Aa) (Ba) (Ar') (Br') in S folgt entweder $(AB) \varepsilon S$ oder $(ar') \varepsilon S$, und im letzteren Falle kommt, wie wir gesehen haben, auch (ar) in S' vor, da $(r'r) \varepsilon S'$. Genau ebenso wird es gehen, wenn entweder (AP) oder $(AQ) \varepsilon S$ ist, während ein Paar (Br') in S auftritt in Verbindung mit $(r'r) \varepsilon S'$. — Also ist S' auch in Bezug auf IV abgeschlossen.

Weiter haben wir den folgenden Satz:

Satz 2. *Gehört (PQ) zu S, und ist S' das System, das aus S entsteht durch Hinzufügung des Paares (rr) und aller Paare (Rr), wobei $(RP) \varepsilon S$ ist, so ist S' in Bezug auf I—IV abgeschlossen, sofern S in der Weise abgeschlossen ist.*

Beweis: Dass I und $\mathrm{II_p}$ für S' gelten sieht man unmittelbar. Dass $\mathrm{II_l}$ gilt sieht man auch sofort dadurch, dass das einzige neue Linienpaar (rr) ist, und wenn entweder (ab) oder (bc) das Paar (rr) ist, so ist (ac) entweder dasselbe Paar wie (ab) oder wie (bc) und gehört also zu S'. Dass $\mathrm{III_p}$ gilt sieht man so: Entweder ist $(AB) \varepsilon S$ und (Ac) auch εS; dann gehört (Bc) zu S. Oder es ist $(AB) \varepsilon S$, während (Ac) der Form (Ar) ist, wobei $(AP) \varepsilon S$. Aus (AB) und $(AP) \varepsilon S$ folgt $(BP) \varepsilon S$, woraus wieder $(Br) \varepsilon S'$. Dass $\mathrm{III_l}$ gültig ist, sieht man so: Sind (ab) und (Ca) nicht beide schon εS, sodass also (Cb) auch sicher schon zu S gehören würde, so sind sie beide $\varepsilon S' - S$. Sie sind dann von den Formen (rr) und (Cr). Dann ist aber (Cb) dasselbe Paar wie (Ca) und gehört also zu S'. Die Gültigkeit von IV kann wie folgt bewiesen werden: Sind (Aa) und $(Ba) \varepsilon S$, während (Ab) und $(Bb) \varepsilon S' - S$ sind (ist $(Ab) \varepsilon S$, so ist auch $(Bb) \varepsilon S$ und umgekehrt), so sind die beiden letzteren Paaren der Formen (Ar) und (Br), wobei (AP) und (BP) beide εS sind. Daraus folgt (AB) εS. Ebenso wenn (Ab) und $(Bb) \varepsilon S$, während (Aa) und folglich (Ba) $\varepsilon S' - S$ sind. Sind endlich alle vier Paare (Aa) (Ba) (Ab) $(Bb) \varepsilon S' - S$, so sind sie von den Formen (Ar) und (Br), wobei (AP) und $(BP) \varepsilon S$, woraus $(AB) \varepsilon S$.

Da das neue System S' in beiden Sätzen keine anderen Paare, aus den in den Paaren von S auftretenden Symbolen gebildet, enthalten als die schon in S vorkommenden, so gilt auch folgender Satz:

Satz 3. *Hat man ein System S von Paaren, das in Bezug auf die Axiome I—IV, aber nicht V, abgeschlossen ist, und wird V ein oder mehrere mal angewandt, so bekommt man durch Hinzufügung aller Paare,*

die dann nachher mit Hülfe von I—IV abgeleitet werden können, ein umfassenderes System S', das wieder in Bezug auf I—IV abgeschlossen ist und nicht andere Paare enthalten, die aus den schon in den Paaren von S auftretenden ursprünglichen Symbolen gebildet sind, als eben die in S vorkommenden Paare.

Wünscht man nun zu entscheiden, ob ein Paar aus gewissen gegebenen Paaren mit Hülfe der Axiome I—V abgeleitet werden kann, so kann man V ausser Betracht lassen; man braucht nur zu untersuchen, ob das betreffende Paar mit Hülfe der Axiome I—IV allein ableitbar ist. Dies lässt sich aber immer entscheiden, weil mit Hülfe dieser Axiome nur eine endliche Zahl von Paaren gebildet werden kann, wenn eine endliche Zahl von solchen gegeben ist. Die Sache ist aber hier insofern mehr verwickelt als in § 2, als der Ableitungsprozess hier nicht eindeutig verläuft, weil Axiom IV eine Alternative ausdrückt. Man muss deshalb den Prozess auf alle mögliche Weisen ausführen, indem man bei jeder Anwendung von IV zwischen zwei Alternativen zu wählen hat. Man wird deshalb aus einem beliebig gegebenen System S von Paaren durch Anwendung der Axiome I—IV auf mehrere Weisen ein in Bezug auf diese Axiome geschlossenes System erhalten; es seien $S_1, S_2, \ldots$ diese Systeme. Soll nun ein Paar (ab) aus den Paaren in S notwendig folgen, so muss (ab) in jedem der Systeme $S_1, S_2, \ldots$ auftreten. Soll man untersuchen, ob mindestens eines der Paare (ab), (cd), usw. von den Paaren eines Systems S folgt, so hat man nachzusehen, ob in jedem der Systeme $S_1, S_2, \ldots$ mindestens eines der Paare (ab), (cd) usw. auftritt. Es braucht aber nicht *dasselbe* dieser letzteren Paare in allen Systemen $S_1, S_2, \ldots$ vorzukommen. Die Disjunktion

$$(ab) + (cd) + \ldots$$

wird aus der Konjunktion aller Paare von S folgen, wenn nur innerhalb S_1 eines der Paare (ab), (cd), ... vorkommt, weiter innerhalb S_2 eines dieser Paare vorkommt, aber nicht notwendig dasselbe wie in S_1, usw.

Ebenso wie in § 2 können wir deshalb auch hier über die Beweisbarkeit jeder Aussage entscheiden, die aus Elementaraussagen, d. h. Paaren (AB), (ab), (Aa), mit Hülfe endlich vieler Anwendungen der Konjunktion, Disjunktion, Negation und Produktation gebildet ist, während Summationen nicht vorkommen. Jede solche Aussage lässt sich ja auf die Form

$$(1) \qquad \underset{x_1}{\Pi} \ldots \underset{x_n}{\Pi}\, U(x_1, \ldots, x_n)$$

bringen, wo U von Elementaraussagen durch endlich viele Anwendungen der Konjunktion, Disjunktion und Negation allein gebildet ist. Wir können dann U als ein endliches Aussagenprodukt (Konjunktion) schreiben: $U(x_1, \ldots, x_n) = E_1 E_2 \ldots E_m$, wobei jede Faktoraussage E_r durch end-

lich viele Anwendungen von Disjunktion und Negation allein gebildet ist. Die Frage, ob (1) beweisbar ist oder nicht, ist dann damit gleichbedeutend, ob für jedes r die Aussage

$$(2) \qquad \underset{x_1}{\Pi} \ldots \underset{x_n}{\Pi} E_r(x_1, \ldots, x_n)$$

beweisbar ist oder nicht. Hier kann man aber E_r wieder als eine endliche Aussagensumme (Disjunktion, Alternative) von teils negierten teils unnegierten Elementaraussagen schreiben. Das heisst aber wieder (Vergl. S. 23), dass E_r aussagt, dass aus der Existenz gewisser Paare $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p$ die Existenz von mindestens einem der Paare $\Pi_{p+1}, \ldots, \Pi_{p+q}$ folgen soll. Das lässt sich aber in der schon angegebenen Weise immer entscheiden.

Ich gebe hier nur ein einziges Beispiel, da es nicht leicht ist einfache und zugleich nicht ganz triviale Beispiele zu finden.

Beispiel: Es sei zu untersuchen, ob der Desarguesche Satz von den homologen Dreiecken aus den aufgestellten Verknüpfungsaxiomen folge oder nicht. Dieser Satz ist ja ein deskriptiver. Er sagt in der kombinatorischen Sprache folgendes: Wenn die Paare

$$(3) \quad \begin{gathered}(A_1b_1)(A_1c_1)(B_1a_1)(B_1c_1)(C_1a_1)(C_1b_1)(A_2b_2)(A_2c_2)(B_2a_2)(B_2c_2)(C_2a_2)(C_2b_2)\\ (A_1d)(A_2d)(Pd)(B_1e)(B_2e)(Pe)(C_1f)(C_2f)(Pf)(Da_1)(Da_2)(Dp)\\ (Eb_1)(Eb_2)(Ep)(Fc_1)(Fc_2)\end{gathered}$$

vorkommen, dann soll auch mindestens eines der Paare

$$(4) \qquad (Fp)\,(a_1a_2)\,(b_1b_2)\,(c_1c_2)$$

vorhanden sein. Dass aber dieser Satz aus den aufgestellten Verknüpfungsaxiomen I—V nicht folgt, lässt sich leicht nach dem oben angegebenen Verfahren zeigen. Denn wir brauchen also das Axiom V nicht zu berücksichtigen, sondern wenden nur die Axiome I—IV so lange an, indem wir von dem System (3) ausgehen, dass ein in Bezug auf I—IV abgeschlossenes System entsteht. Kraft I können alle Selbstpaare $(A_1A_1)(B_1B_1)$ usw. gebildet werden. Werden diese zu den Paaren (3) hinzugefügt, haben wir aber schon ein in Bezug auf I—IV abgeschlossenes System. Denn da keine anderen reinen Linien- oder Punktpaare als diese Selbstpaare auftreten, so sind die Axiome II und III erfüllt, und IV ist auch, wie man leicht konstatiert von selbst erfüllt. Da keines der Paare (4) unter den erhaltenen Paaren vorkommt, so lässt sich der Desarguesche Satz nicht auf Grund der Axiome I—V beweisen[1].

[1] Im Raume dagegen ist der Satz bekanntlich eine Folge der Verknüpfungsaxiome.

§ 4.

Ein Satz über dichte Mengen.[1]

Es ist ein bekannter Satz der Mengenlehre, dass die Elemente zweier offener[2] und dichter abzählbarer Mengen eineindeutig und unter Beibehalt der Anordnung zugeordnet werden können. Man sagt, dass die zwei Mengen einander ähnlich sind. Ich will im folgenden einige Sätze beweisen, die noch etwas mehr aussagen; es soll nämlich bewiesen werden, dass zwei solche Mengen, die in gewisser Weise *eingeteilt* sind, unter Beibehalt nicht nur der Anordnung sondern auch der Einteilung eineindeutig zugeordnet werden können. Der Beweis geschieht genau nach demselben Prinzip wie der Beweis für den einfacheren Satz über die Gleichheit der Anordnung. Soweit mir bekannt, ist die Möglichkeit solcher Abbildungen unter Beibehalt sowohl der Anordnung wie der Einteilungen früher nicht bemerkt worden.

Satz 1. *Es sei C eine abzählbare linear geordnete, dichte und offene Menge, welche die Summe zweier elementfremden Mengen A und B ist, wobei sowohl A wie B in C dicht und mit C koextensiv*[3] *sind. Ebenso sei C' eine offene und dichte abzählbare Menge, welche die Summe zweier Mengen A' und B' ist, wobei sowohl A' wie B' in C dicht und mit C' koextensiv sind. Dann kann C auf C' in der Weise eineindeutig abgebildet werden, dass dadurch A auf A' und B auf B' abgebildet wird, während auch immer ein früheres Element auf ein früheres abgebildet wird.*

Beweis: Es seien $a_1, a_2, \ldots$ die Elemente von A, $b_1, b_2, \ldots$ die Elemente von B, $a'_1, a'_2, \ldots$ die Elemente von A' und $b'_1, b'_2, \ldots$ die Elemente von B'. Im Laufe des Beweises werden successive neue Namen für alle diese Dinge eingeführt, indem die Elemente von A, B, A' und B' bez. $\alpha_1\, \alpha_2, \ldots, \beta_1\, \beta_2 \ldots, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ und $\beta'_1, \beta'_2, \ldots$ genannt werden. Ich definiere dann rekurrierend wie folgt eine Abbildung Φ von $C = A + B$ auf $C' = A' + B'$. Zuerst soll $\alpha'_1 = a'_1$ das Bild von $\alpha_1 = a_1$ sein. Dann soll $\beta_1 = b_1$ auf dasjenige Element von B' abgebildet werden, das unter allen Elementen von B', welche dieselbe Rangordnung in Bezug auf a'_1 wie b_1 in Bezug auf a_1 haben, den kleinsten Index hat, also in der Reihe $b'_1, b'_2, \ldots$ zuerst auftritt. Wegen der Offenheit von C' und weil B' mit C' koextensiv ist, gibt es solche Elemente von B' und deshalb auch unter ihnen eines mit dem kleinsten Index. Ich nenne dieses Element β'_1. Weiter soll

[1] Der Inhalt dieses Paragraphen ist von dem der vorhergehenden Paragraphen völlig unabhängig.

[2] Siehe F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, p. 83.

[3] Siehe F. Hausdorff: Theorie der geordneten Mengen, Mat. Ann. B. 65, p. 440.

$a'_2 = a'_2$ das Bild desjenigen Elementes von A sein, das mit dem kleinsten Index dieselbe Rangordnung in Bezug auf $a_1 = \alpha_1$ und $b_1 = \beta_1$ hat, wie a'_2 in Bezug auf a'_1 und β_1. Da A in C dicht und mit C koextensiv ist, lässt sich ein solches Element von A finden. Es soll α_2 heissen. Weiter soll β'_2 das erste Element in der Reihe $b'_1, b'_2, \ldots$ sein, das von β'_1 verschieden ist. Dieses β'_2 soll das Bild desjenigen Elementes der Reihe $b_1, b_2, \ldots$ sein, das mit dem kleinsten Index dieselbe Rangordnung in Bezug auf α_1, α_2 und β_1 hat, wie β'_2 in Bezug auf α'_1, α'_2 und β'_1. Dieses Element von B soll β_2 heissen.

In dieser Weise wird ins Unendliche fortgesetzt, indem man abwechselnd ein Element jeder der beiden Mengen A und B auf ein Element von A' und ein Element von B' und wieder ein Element jeder der Mengen A' und B' auf ein Element von A und ein Element von B abbildet, wobei man bei jeder Gelegenkeit unter allen noch disponiblen Dingen dasjenige mit dem kleinsten Index wählt und bei jeder Wahl eines Bildes dafür sorgt, dass das Bild dieselbe Rangordnung zu den schon gewählten Bildern hat, wie das abzubildende Bild zu den früher abgebildeten. Die letzte Forderung ist immer Erfüllbar kraft der Dichtigkeit und Offenheit der Mengen, und weil sie koextensiv sind.

Das allgemeine Prinzip des Abbildungsprozesses wird also genau ausgedrückt wie folgt. Es seien schon die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von A und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ von B auf die Elemente $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n'$ von A' bez. $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$ von B' in der Weise abgebildet, dass dabei die Rangordnungen nicht gestört werden. So oft n eine *gerade* Zahl ist, lässt man dann α_{n+1} dasjenige unter den von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ verschiedenen der Elemente $a_1, a_2, \ldots$ von A sein, das den kleinsten Index hat. Weiter soll α'_{n+1}, das Bild von α_{n+1}, dasjenige unter den in A' vorkommenden Dingen $a_1' a_2', \ldots$ sein, das dieselbe Rangordnung in Bezug auf $\alpha_1' \alpha_2' \ldots, \alpha_n'$, $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$ hat, wie α_{n+1} in Bezug auf $\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, und ausserdem den kleinsten möglichen Index hat. So bestimmt man weiter, dass β_{n+1} dasjenige unter den von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ verschiedenen Dingen der Reihe $b_1, b_2, \ldots$ sein soll, das in dieser Reihe den kleinsten Index hat, während das zu β_{n+1} gehörende Bild β'_{n+1} als das Element der Reihe $b_1', b_2', \ldots$ gewählt wird, das mit dem kleinsten Index dieselbe Rangordnung in Bezug auf $\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha'_{n+1}, \beta_1', \ldots, \beta_n'$ hat wie β_{n+1} in Bezug auf $\alpha_1 \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \beta_1, \ldots, \beta_n$. So oft dagegen n eine *ungerade* Zahl ist, lässt man α'_{n+1} dasjenige der Elemente $\alpha_1', \alpha_2', \ldots$ von A' sein, das mit dem kleinsten überhaupt möglichen Index von $\alpha'_1 \ldots, \alpha'_n$ verschieden ist, und bestimmt das zugeordnete Ding α_{n+1} als das in der Reihe $a_1, a_2, \ldots$ zuerst auftretende, das dieselbe Rangordnung in Ver-

hältnis zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ hat, wie α'_{n+1} in Verhältnis zu $\alpha_1', \ldots \alpha_n'$, $\beta_1', \ldots, \beta_n'$. Weiter lässt mann β'_{n+1} dasjenige Element der Reihe $b_1', b_2', \ldots$ sein, das mit dem kleinsten Index von $\beta_1' \ldots, \beta_n'$ verschieden ist, und bestimmt das zugeordnete Ding β_{n+1} als das Element mit dem kleinsten Index der Reihe $b_1, b_2, \ldots$, das dieselbe Rangordnung in Bezug aut $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \beta_1, \ldots, \beta_n$ hat wie β'_{n+1} in Verhältnis zu $\alpha_1', \ldots, \alpha_n'$, $\alpha'_{n+1}, \beta_1', \ldots, \beta_n'$.

Wenn dieser Prozess, der augenscheinlich ganz eindeutig verläuft, ins Unendliche getrieben wird, entsteht eine eindeutig bestimmte eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengen $C = A + B$ und $C' = A' + B'$, sodass dabei die Elemente von A' den Elementen von A und die Elemente von B' den Elementen von B zugeordnet werden, während auch immer ein früheres Element einem früheren zugeordnet wird.

Hierdurch ist der Satz 1 bewiesen.

Es ist klar, dass dieser Satz sofort in folgender Weise verallgemeinert werden kann:

Satz 2. *Es sei A eine abzählbare linear geordnete, dichte und offene Menge, welche die Summe der paarweise elementenfremden Mengen A_1, $A_2, \ldots, A_n$ ist, die alle in A dicht und mit A koextensiv sind. Ebenso sei B eine abzählbare linear geordnete, dichte und offene Menge, welche die Summe der paarweise elementenfremden Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ist, die alle in B dicht und mit B koextensiv sind. Es gibt dann eine eineindeutige Abbildung Φ von A auf B, sodass dabei für jedes r A_r auf B_r abgebildet wird, während ausserdem die Anordnungsverhältnisse bei der Abbildung nicht gestört werden.*

Der Beweis lässt sich in der Tat in einer ganz ähnlichen Weise wie der Beweis für Satz 1 führen. Man braucht bloss abwechselnd ein Element jeder der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf ein Element jeder der Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ und wieder ein Element jeder der Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ auf ein Element jeder der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abzubilden, wobei man immer unter den noch disponiblen Elementen dasjenige mit dem kleinsten Index (bei der angenommenen Numerierung (Abzählung) der Elemente der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$) wählt und bei jeder Wahl eines Bildes dafür sorgt, dass das Bild dieselbe Rangordnung hat zu den schon gewählten Bildern wie das abzubildende Ding zu den früher abgebildeten. Die letzte Forderung ist immer erfüllbar kraft der Offenheit und Dichtigkeit der Mengen, und weil sie koextensiv sind.

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Auch folgender Satz gilt:

Satz 3. *Es sei A eine abzählbare linear geordnete offene und dichte Menge, welche die Summe der abzählbar unendlich vielen paarweise*

elementenfremden Mengen A_1, A_2, A_3, ... ist, die alle in A dicht und mit A koextensiv sind. Ebenso sei B eine abzählbare linear geordnete offene und dichte Menge, welche die Summe der abzählbar unendlich vielen paarweise elementenfremden Mengen B_1, B_2, ... ist, die alle in B dicht und mit B koextensiv sind. Dann gibt es eine eineindeutige Abbildung von A auf B, sodass dabei für jeden Index r A_r auf B_r abgebildet wird, während ausserdem die Abbildung anordnungstreu ist.

Beweis: Es seien $a_{m,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Elemente von A_m und $b_{m,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Elemente von B_m. Es ist dann möglich in folgender Weise eine Abbildung der verlangten Art zu definieren.

Erstens soll $a_1^1 = a_{1,1}$ auf $b_1^1 = b_{1,1}$ abgebildet werden. — Dann soll $b_1^2 = b_{1,2}$ das Bild desjenigen Elementes der Reihe $a_{1,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sein, das mit einem so kleinen Werte von n als überhaupt möglich dieselbe Rangordnung in Bezug auf a_1^1 hat wie b_1^2 in Bezug auf b_1^1; es sei a_1^2 dieses Element. Weiter soll $b_2^1 = b_{2,1}$ das Bild desjenigen Elementes der Reihe $a_{2,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sein, das mit dem kleinsten möglichen Werte von n dieselbe Stellung in Verhältnis zu a_1^1 und a_1^2 hat wie b_2^1 in Verhältnis zu b_1^1 und b_1^2. Dieses Element soll a_2^1 heissen. — Dann soll a_1^3 das Element der Reihe $a_{1,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sein, das mit dem kleinsten Index n von a_1^1 und a_1^2 verschieden ist, und man bildet es ab auf das Element b_1^3 der Reihe $b_{1,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, das mit dem kleinsten Werte von n in derselben Rangordnung in Bezug auf b_1^1, b_1^2 und b_2^1 steht wie a_1^3 in Bezug auf a_1^1, a_1^2 und a_2^1. Weiter soll a_2^2 das Element der Reihe $a_{2,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sein, das mit einem so kleinen Werte von n als möglich von a_2^1 verschieden ist, und a_2^2 wird auf dasjenige Element b_2^2 der Reihe $b_{2,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ abgebildet, das mit dem kleinsten Werte von n dieselbe Rangordnung in Bezug auf b_1^1, b_1^2, b_1^3, b_2^1 hat wie a_2^2 in Bezug auf a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_2^1. Dann soll $a_3^1 = a_{3,1}$ auf $b_3^1 = b_{3,1}$ abgebildet werden. — Das nächste Mal sollen b_1^4, b_2^3, b_3^2 und b_4^1 die Bilder von a_1^4, a_2^3, a_3^2, a_4^1 sein, wobei b_1^4 als dasjenige unter den von b_1^1, b_1^2 und b_1^3 verschiedenen Elementen der Reihe $b_{1,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gewählt wird, das den kleinsten Wert von n hat, b_2^3 als dasjenige unter den von b_2^1 und b_2^2 verschiedenen Elementen der Reihe $b_{2,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, für welches n den kleinsten möglichen Wert hat, b_3^2 als das Element der Reihe $b_{3,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, das mit dem kleinsten Wert von n der Forderung Genüge leistet von b_3^1 verschieden zu sein, und endlich $b_4^1 = b_{4,1}$ gewählt werden. Weiter wird a_1^4 als das Element der Reihe $a_{1,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gewählt, das mit dem kleinsten n dieselbe Stellung in Bezug auf a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_2^1, a_2^2, a_3^1 hat wie b_1^4 in bezug auf b_1^1, b_1^2, b_1^3, b_2^1, b_2^2 und b_3^1; a_2^3 wird als das Element der Reihe $a_{2,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gewählt, das mit dem kleinsten n dieselbe Stellung in Bezug auf a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4,

a_2^1, a_2^2, a_3^1 hat wie b_2^3 in Bezug auf $b_1^1, b_1^2, b_1^3, b_1^4, b_2^1, b_2^2$ und b_3^1, a_3^2 als das Element der Reihe $a_{3,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, das mit dem kleinsten Werte von n dieselbe Stellung in Bezug auf $a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2^1, a_2^2, a_2^3, a_3^1$ einnimmt wie b_3^2 in Bezug auf $b_1^1, b_1^2, b_1^3, b_1^4, b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_3^1$, und endlich wird a_4^1 als das Element der Reihe $a_{4,n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gewählt, das mit dem kleinsten möglichen n dieselbe Rangordung in Bezug auf $a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_2^1, a_2^2, a_2^3, a_3^1, a_3^2$ hat wie b_4^1 in Bezug auf $b_1^1, b_1^2, b_1^3, b_1^4, b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_3^1, b_3^2$.

Das allgemeine Rekursionsprinzip des Abbildungsprozesses, das übrigens wohl schon nach dem obigen verständlich ist, kann genau in folgender Weise formuliert werden:

Es seien schon

$$a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n, a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^{n-1}, \ldots\ldots\ldots, a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, a_n^1$$

auf den Dingen

$$b_1^1, b_1^2, \ldots, b_1^n, b_2^1, b_2^2, \ldots, b_2^{n-1}, \ldots\ldots\ldots, b_{n-1}^1, b_{n-1}^2, b_n^1$$

eineindeutig und anordnungstreu abgebildet. So oft dann n eine *gerade* Zahl ist, soll a_1^{n+1} dasjenige unter den von $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n$ verschiedenen Elementen der Reihe $a_{1,\gamma}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots)$ sein, für welches γ den kleinsten Wert hat, a_2^n soll dasjenige unter den von $a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^{n-1}$ verschiedenen Elementen der Reihe $a_{2,\gamma}$ sein, für welches γ den kleinsten Wert hat, usw. und also zuletzt $a_{n+1}^1 = a_{n+1,1}$. Das Bild b_1^{n+1} von a_1^{n+1} soll dasjenige Element der Reihe $b_{1,\gamma}$ sein, das mit einem so kleinen Werte von γ als möglich dieselbe Stellung in Bezug auf $b_1^1 \ldots b_1^n, b_2^1 \ldots, b_2^{n-1}, \ldots\ldots, b_{n-1}^1, b_{n-1}^2, b_n^1$ einnimmt wie a_1^{n+1} in Bezug auf $a_1^1, \ldots a_1^n, a_2^1, \ldots a_2^{n-1}, \ldots, a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, a_n^1$. Dann soll das Bild b_2^n von a_2^n dasjenige Element der Reihe $b_{2,\gamma}$ sein, das mit einem so kleinen Werte von γ als möglich dieselbe Rangordnung in Bezug auf alle schon gewählten Bilder b, d. h. $b_1^1, b_1^2, \ldots, b_1^n, b_1^{n+1}, b_2^1 \ldots b_2^{n-1}, b_3^1 \ldots, b_3^{n-2}, \ldots, b_{n-1}^1, b_{n-1}^2, b_n^1$, hat, wie a_2^n in Bezug auf alle schon abgebildeten a, d. h. $a_1^1, \ldots, a_1^n, a_1^{n+1}, a_2^1, \ldots, a_2^{n-1}, \ldots, a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, a_n$. Danach wird das Bild b_3^{n-1} von a_3^{n-1} als das Element der Reihe $b_{3,\gamma}$ gewählt, das mit dem kleinsten γ dieselbe Rangordnung in Bezug auf alle früher als Bilder schon gewählten b hat wie a_3^{n-1} in Bezug auf alle schon abgebildeten a, usw. Zuletzt wird also das Bild b_{n+1}^1 von a_{n+1}^1 als das Element der Reihe $b_{n+1,\gamma}$ gewählt, das mit dem kleinsten γ dieselbe Stellung in Verhältnis zu $b_1^1, b_1^2, \ldots, b_1^{n+1}, b_2^1, b_2^2, \ldots, b_2^n, \ldots\ldots, b_{n-1}^1, b_{n-1}^2, b_{n-1}^3, b_n^1, b_n^2$ hat wie a_{n+1}^1 in Verhältnis zu $a_1^1 \ldots a_1^{n+1}, a_2^1 \ldots a_2^n, \ldots a_n^1, a_n^2$. Nachdem so viel gemacht ist, sind die Dinge

$$a_1^1, \ldots, a_1^{n+1}, a_2^1, \ldots a_2^n, \ldots\ldots, a_n^1, a_n^2, a_{n+1}^1$$

eineindeutig und anordnungstreu auf den Dingen

$$b_1^1 \ldots, b_1^{n+1}, b_2^1 \ldots b_2^n, \ldots\ldots, b_n^1, b_n^2, b_{n+1}^1$$

abgebildet.

So oft n eine *ungerade* Zahl ist, geht man in derselben Weise vor, indem nur die a und die b ihre Rollen vertauschen.

Man überzeugt sich sehr leicht davon, dass nach und nach alle Elemente von A bei diesem ins Unendliche getriebenen Prozess abgebildet werden, während auch andererseits alle Elemente von B nach und nach als Bilder auftreten werden. Man bekommt also eine eineindeutige und anordnungstreue Abbildung von A auf B, so dass dabei für jedes r die Teilmenge A_r von A auf den Teil B_r von B abgebildet wird, w. z. bw. w.

Man kann von diesen Sätzen interessante Anwendungen machen. Ich gebe hier ein Paar einfache Beispiele.

Beispiel 1. Die Menge aller reellen algebraischen Zahlen besteht aus den rationalen Zahlen und den irrationalen reellen algebraischen Zahlen, und diese beiden Teilmengen sind in der Menge aller reellen algebraischen Zahlen dicht und mit dieser koextensiv. Ausserdem gibt es keine kleinste und keine grösste reelle algebraische Zahl. Die Menge aller algebraischen reellen Zahlen, deren Grad höchstens gleich 2 ist, ist offen und dicht und besteht aus den rationalen Zahlen und den reellen quadratisch-irrationalen Zahlen. Die beiden letzten Teilmengen sind in der ganzen Menge dicht und mit dieser koextensiv. Nach Satz 1. muss es dann möglich sein die Menge aller reellen algebraischen Zahlen eineindeutig unter Beibehalt der Grössenverhältnisse auf die Menge aller reellen algebraischen Zahlen, deren Grad 2 nicht überschreitet, so abzubilden, dass dabei die Menge der rationalen Zahlen auf sich selbst abgebildet wird. Man kann dies auch so ausdrücken: Es gibt eine eindeutige reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x, die folgende Eigenschaften hat:

1. Sie ist monoton wachsend.
2. Sie ist stetig.
3. Für jedes rationale x ist $f(x)$ rational und umgekehrt.
4. Für jeden irrationalen algebraischen Wert von x ist der Wert von $f(x)$ eine quadratisch irrationale Zahl und umgekehrt, wenn $f(x)$ quadratisch irrational ist, hat x einen irrationalen algebraischen Wert.

Man kann ja jede anordnungstreue eindeutige Zuordnung zwischen zwei überall dichten Mengen zu einer stetigen monoton wachsenden Funktion eines reellen Arguments erweitern, also einer stetigen Abbildung des ganzen Continuums in sich selbst.

Beispiel 2. Es seien in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ zwei unendliche Reihen von abzählbaren Mengen $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ gegeben, wobei jedes A_r wie auch jedes B_r im ganzen Intervall überall dicht ist. Es gibt dann nach Satz 3 eine eindeutige monoton wachsende stetige Funktion

$f(x)$ so beschaffen, dass für jedes r der Wert von $f(x)$ zu B_r gehört, so oft x zu A_r gehört, und umgekehrt x zu A_r gehört, so oft $f(x)$ eine Zahl in B_r ist.

Anmerkung: Es ist klar, dass analoge Sätze wie die oben bewiesenen auch für diejenigen dichten Mengen höherer Mächtigkeit gelten müssen, die von Hausdorff η_ξ-Mengen genannt worden sind. (Siehe Grundzüge der Mengenlehre, p. 181).

Gedruckt 29. Sept. 1920.